

transformation locale

Partie B — thème 3

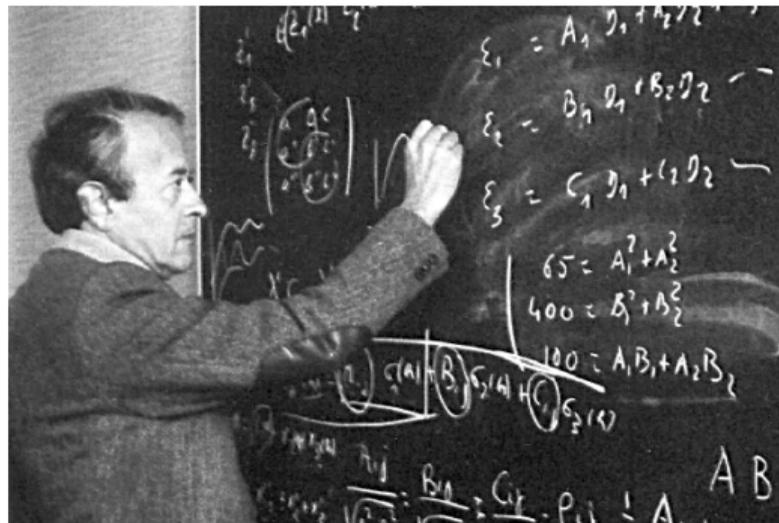
Transformations morphologiques



- ▶ opérateurs de traitements paramétrables par des informations géométriques
- ▶ analyse de structures spatiales (forme, taille, orientation, etc.) au voisinage de chaque pixel

1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ analyse quantitative de structures dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images binaires \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : élément structurant
- ▶ approche ensembliste pour explorer des formes : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux images monochromes : \cap et $\cup \rightarrow \min$ et \max
- ▶ extension aux images couleurs : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



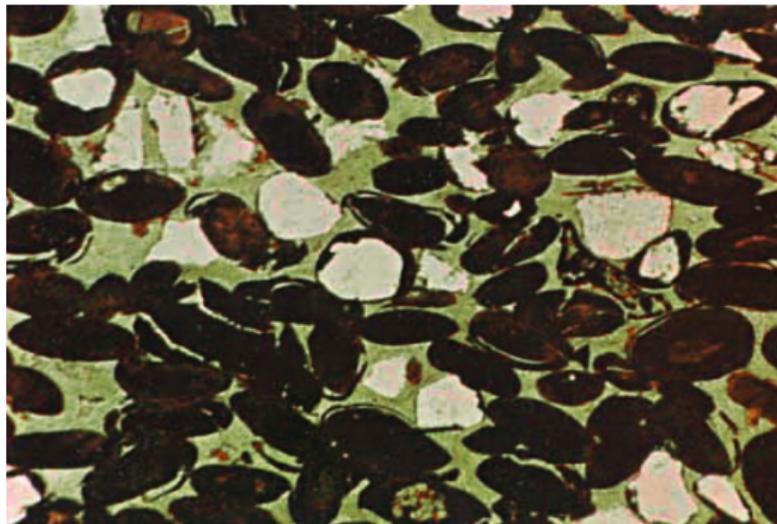
1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ analyse quantitative de structures dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images binaires \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : élément structurant
- ▶ approche ensembliste pour explorer des formes : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux images monochromes : \cap et $\cup \longrightarrow$ min et max
- ▶ extension aux images couleurs : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



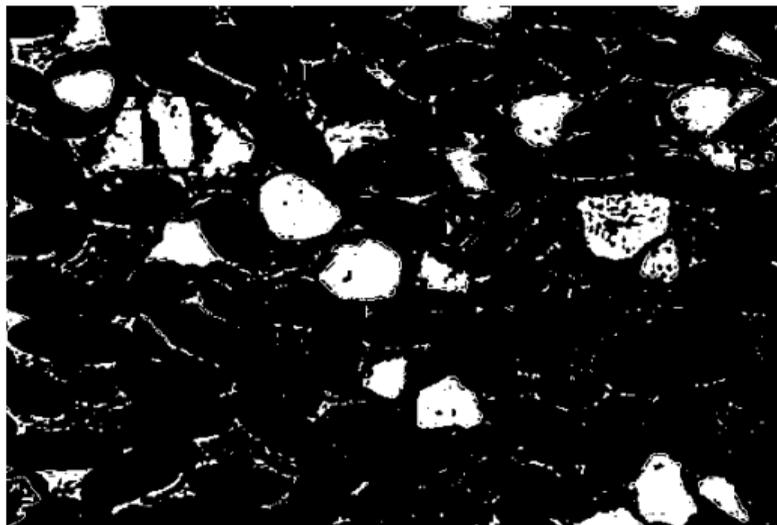
1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ **analyse quantitative de structures** dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images **binaires** \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : **élément structurant**
- ▶ approche **ensambliste** pour explorer des **formes** : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux **images monochromes** : \cap et $\cup \longrightarrow$ min et max
- ▶ extension aux **images couleurs** : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



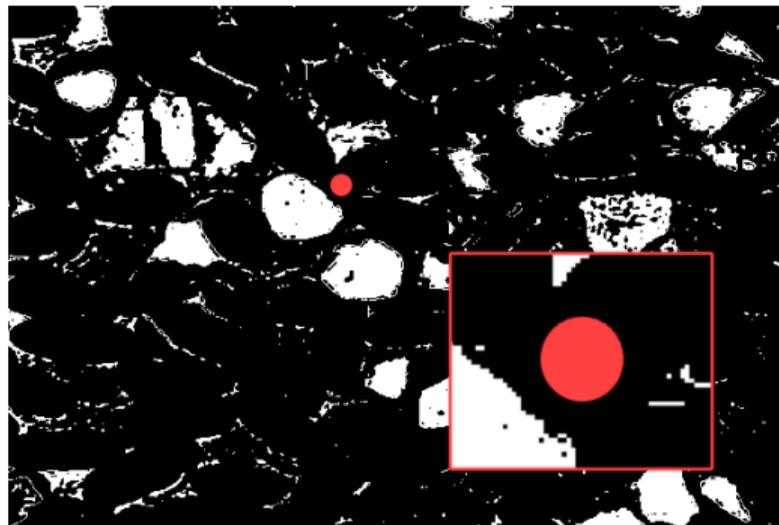
1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ **analyse quantitative de structures** dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images **binaires** ↔ fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : **élément structurant**
- ▶ approche **ensembliste** pour explorer des **formes** : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux **images monochromes** : \cap et $\cup \longrightarrow$ min et max
- ▶ extension aux **images couleurs** : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ **analyse quantitative de structures** dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images **binaires** ↔ fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : **élément structurant**
- ▶ approche **ensembliste** pour explorer des **formes** : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux **images monochromes** : \cap et $\cup \longrightarrow$ min et max
- ▶ extension aux **images couleurs** : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



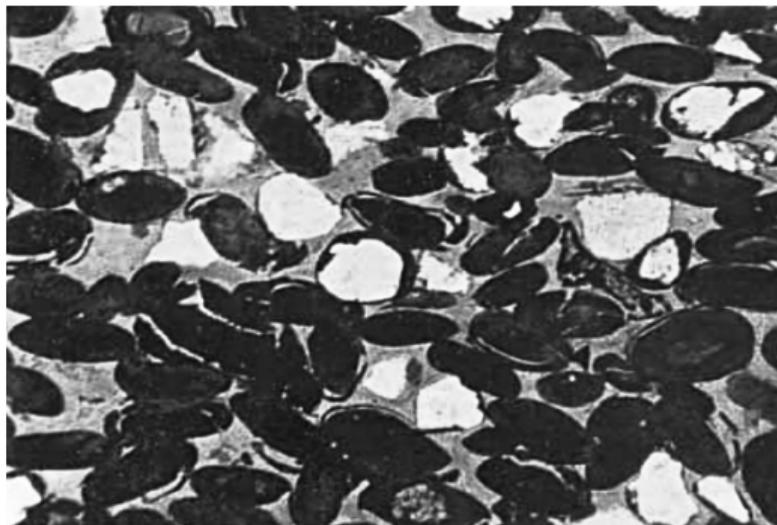
1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ **analyse quantitative de structures** dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images **binaires** ↔ fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : **élément structurant**
- ▶ approche **ensembliste** pour explorer des **formes** : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux **images monochromes** : \cap et $\cup \longrightarrow$ min et max
- ▶ extension aux **images couleurs** : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



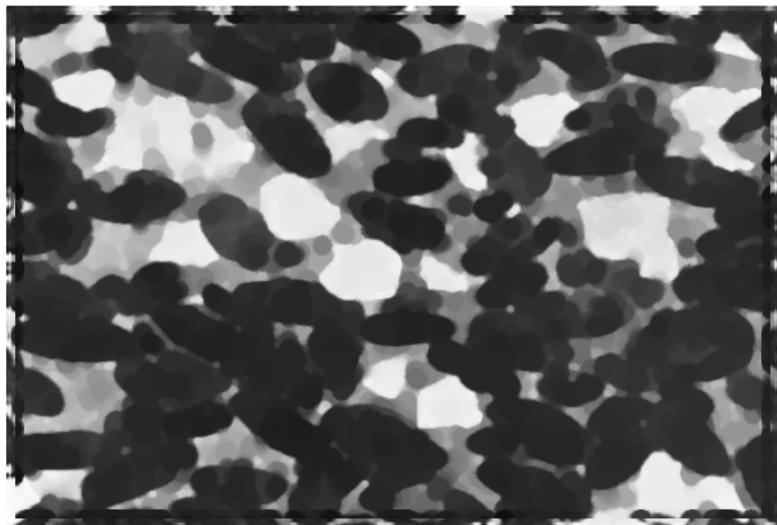
1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ **analyse quantitative de structures** dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images **binaires** \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : **élément structurant**
- ▶ approche **ensambliste** pour explorer des **formes** : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux **images monochromes** : \cap et $\cup \longrightarrow$ **min** et **max**
- ▶ extension aux **images couleurs** : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



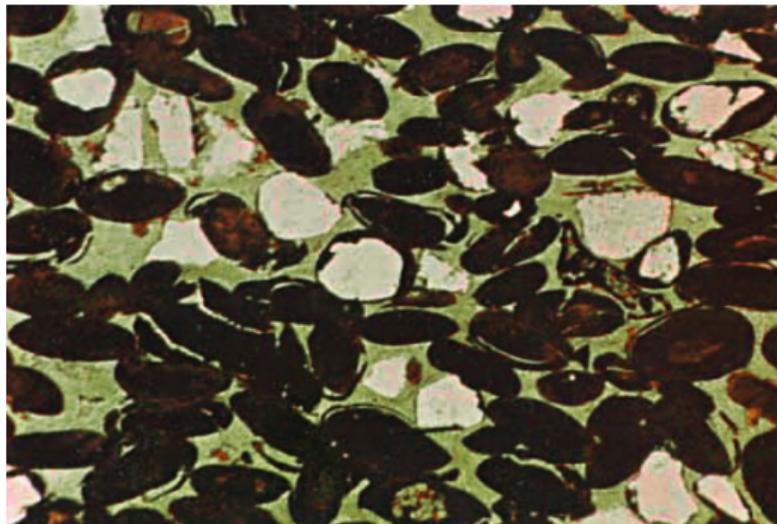
1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ **analyse quantitative de structures** dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images **binaires** ↔ fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : **élément structurant**
- ▶ approche **ensembliste** pour explorer des **formes** : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux **images monochromes** : \cap et \cup \longrightarrow **min** et **max**
- ▶ extension aux **images couleurs** : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



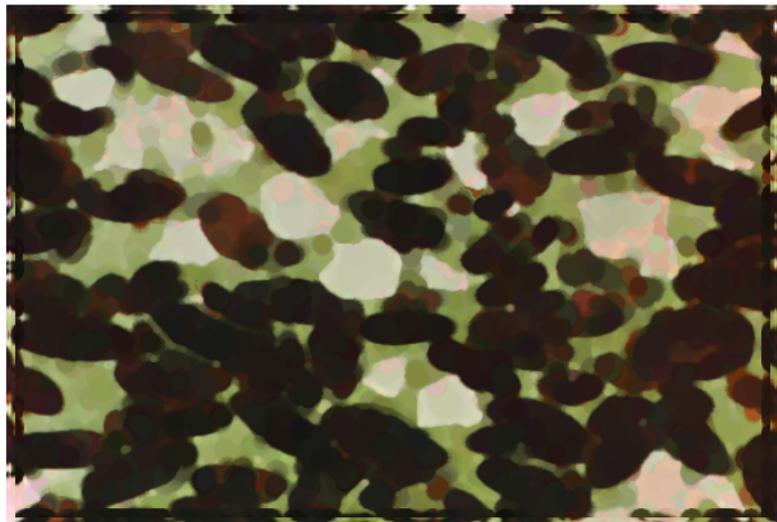
1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ **analyse quantitative de structures** dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images **binaires** \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : **élément structurant**
- ▶ approche **ensembliste** pour explorer des **formes** : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux **images monochromes** : \cap et $\cup \longrightarrow$ min et max
- ▶ extension aux **images couleurs** : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



1. Morphologie mathématique

- ▶ G. Matheron et J. Serra (géostatistiques) – papiers fondateurs : déc. 1964
- ▶ modélisation mathématique développée pour résoudre un problème concret d'analyse d'image géologique
- ▶ **analyse quantitative de structures** dans des milieux poreux (impact de migration de calcite sur les forages)
- ▶ initialement, opérations définies sur des ensembles de points : images **binaires** \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ repose sur l'utilisation de formes de référence : **élément structurant**
- ▶ approche **ensembliste** pour explorer des **formes** : opérateurs morphologiques construits à partir de \cap , \cup , \subset , etc.
- ▶ extension aux **images monochromes** : \cap et $\cup \longrightarrow$ min et max
- ▶ extension aux **images couleurs** : marginal ou en vectoriel (relation d'ordre sur \mathcal{C})



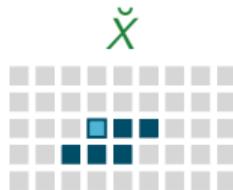
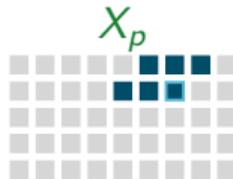
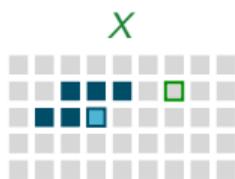
2. Primitives morphologiques

2.1. Élément structurant

- ▶ ensemble X de points de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ utilisé pour modifier une image
- ▶ choisi en fonction de sa forme et muni d'une origine
- ▶ exemples d'éléments structurants (E.S.)

E.S. isotropes			E.S. anisotropes	
				

- ▶ notations :



translation
au point p

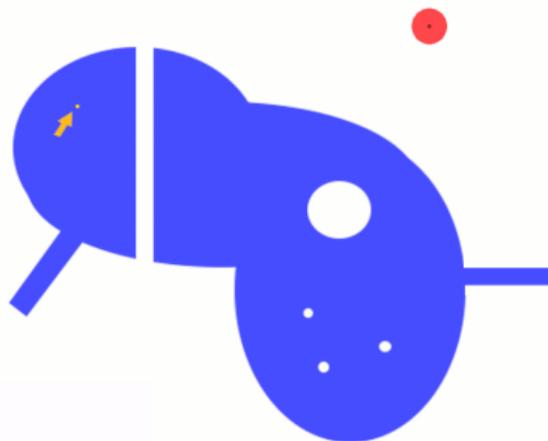
transposition :
symétrie % à l'origine

complémentaire

2.2. Érosion

- ▶ ε_X : **érosion** d'un ensemble E par un élément structurant X
- ▶ principe : on conserve seulement les points pour lesquels l'élément structurant est entièrement contenu dans l'ensemble

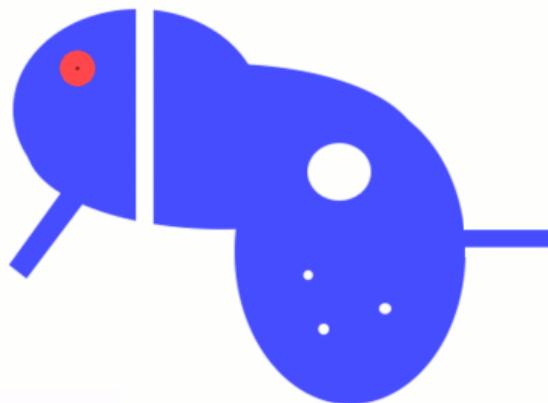
$$\varepsilon_X(E) = \{p / X_p \subseteq E\}$$



2.2. Érosion

- ▶ ε_X : **érosion** d'un ensemble E par un élément structurant X
- ▶ principe : on conserve seulement les points pour lesquels l'élément structurant est entièrement contenu dans l'ensemble

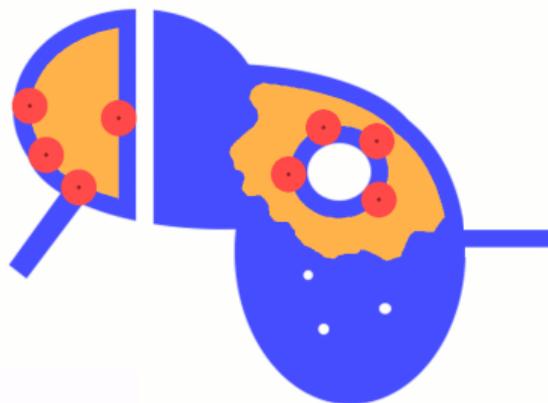
$$\varepsilon_X(E) = \{p / X_p \subseteq E\}$$



2.2. Érosion

- ▶ ε_X : **érosion** d'un ensemble E par un élément structurant X
- ▶ principe : on conserve seulement les points pour lesquels l'élément structurant est entièrement contenu dans l'ensemble

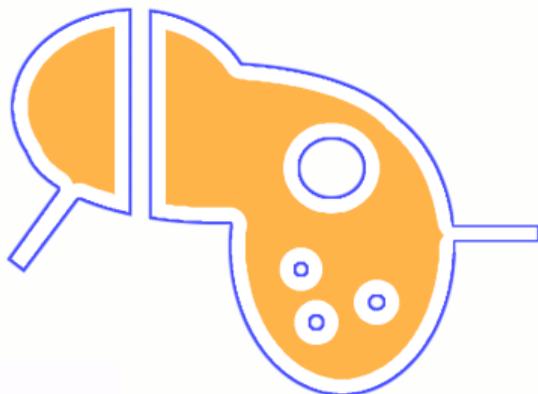
$$\varepsilon_X(E) = \{p / X_p \subseteq E\}$$



2.2. Érosion

- ▶ ε_X : **érosion** d'un ensemble E par un élément structurant X
- ▶ principe : on conserve seulement les points pour lesquels l'élément structurant est entièrement contenu dans l'ensemble

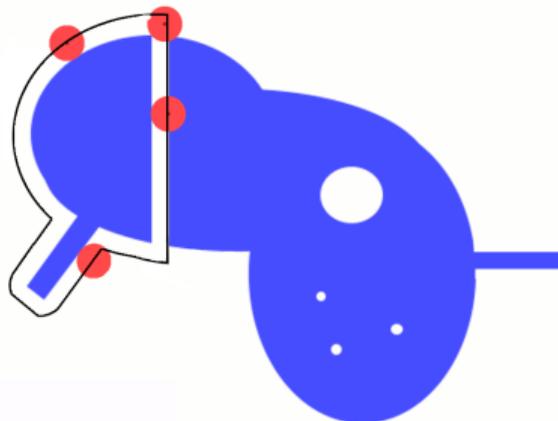
$$\varepsilon_X(E) = \{p / X_p \subseteq E\}$$



2.3. Dilatation

- ▶ δ_X : dilatation d'un ensemble E par un élément structurant X
- ▶ principe : on conserve tous les points pour lesquels l'élément structurant intersecte l'ensemble

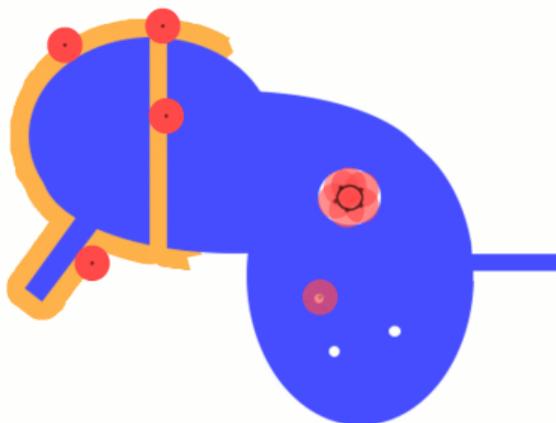
$$\delta_X(E) = \{p / X_p \cap E \neq \emptyset\}$$



2.3. Dilatation

- ▶ δ_X : dilatation d'un ensemble E par un élément structurant X
- ▶ principe : on conserve tous les points pour lesquels l'élément structurant intersecte l'ensemble

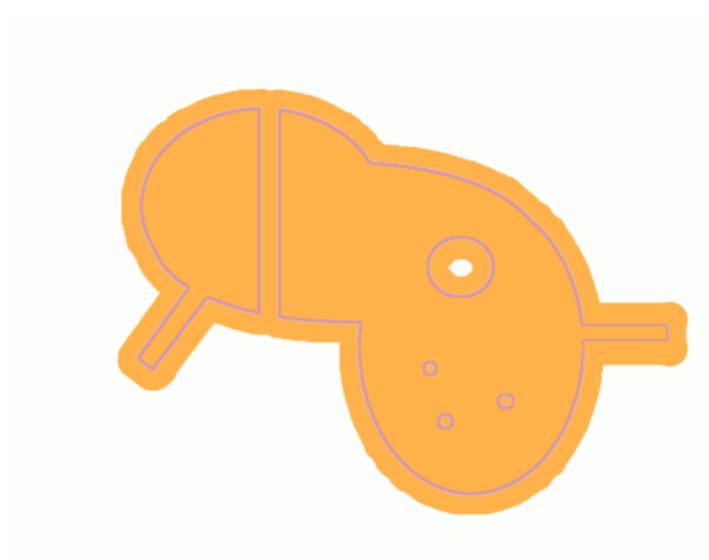
$$\delta_X(E) = \{p / X_p \cap E \neq \emptyset\}$$



2.3. Dilatation

- ▶ δ_X : dilatation d'un ensemble E par un élément structurant X
- ▶ principe : on conserve tous les points pour lesquels l'élément structurant intersecte l'ensemble

$$\delta_X(E) = \{p / X_p \cap E \neq \emptyset\}$$



2.4. Exemples de dilatations et érosions

○ Exemple 1 : amélioration d'un masque

- ▶ masque : ensemble de points utilisé pour **restreindre** un traitement
- ▶ obtenu par seuillage, distance à une couleur, etc.

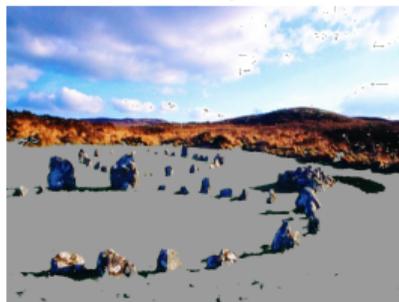


- ▶ le résultat est généralement imparfait et nécessite un retraitement : typiquement érosions et dilatations

2.4. Exemples de dilatations et érosions

○ Exemple 1 : amélioration d'un masque

- ▶ masque : ensemble de points utilisé pour **restreindre** un traitement
- ▶ obtenu par seuillage, distance à une couleur, etc.



- ▶ le résultat est généralement imparfait et nécessite un retraitement : typiquement érosions et dilatations

2.4. Exemples de dilatations et érosions

○ Exemple 1 : amélioration d'un masque

- ▶ masque : ensemble de points utilisé pour **restreindre** un traitement
- ▶ obtenu par seuillage, distance à une couleur, etc.



- ▶ le résultat est généralement imparfait et nécessite un retraitement : typiquement érosions et dilatations

★ Amélioration d'un masque

Utilisation de primitives morphologique pour supprimer des éléments de petite taille dans un masque (ici les régions noires de taille inférieure à une certaine valeur)



★ Amélioration d'un masque

Utilisation de primitives morphologique pour supprimer des éléments de petite taille dans un masque (ici les régions noires de taille inférieure à une certaine valeur)



★ Amélioration d'un masque



Sur l'image de gauche, l'ensemble M des points en noir est l'ensemble des points du masque à traiter. On effectue sur M un traitement morphologique avec un élément structurant circulaire.



érosion

B

dilatation



érosion puis dilatation

D

dilatation puis érosion

Quel traitement permet d'obtenir l'ensemble M' de l'image de droite ?

★ Amélioration d'un masque



Sur l'image de gauche, l'ensemble M des points en noir est l'ensemble des points du masque à traiter. On effectue sur M un traitement morphologique avec un élément structurant circulaire.

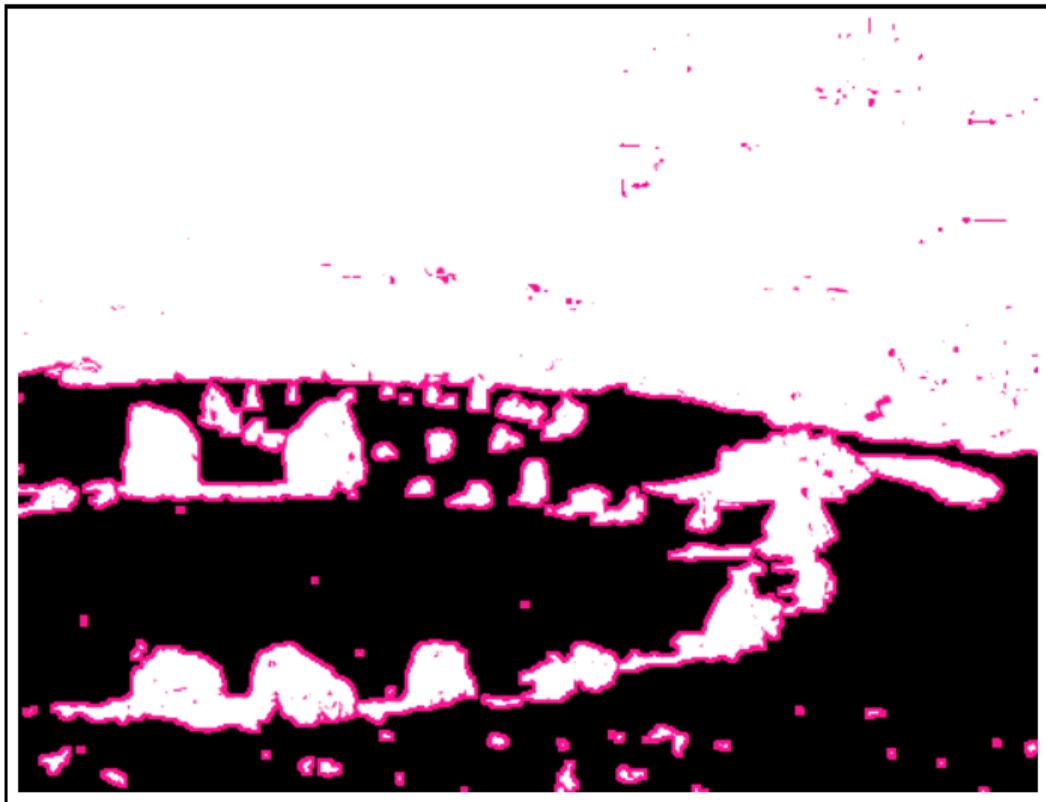
- A** érosion
- B** dilatation
- C** érosion puis dilatation
- D** dilatation puis érosion

Quel traitement permet d'obtenir l'ensemble M' de l'image de droite ?

★ Amélioration d'un masque



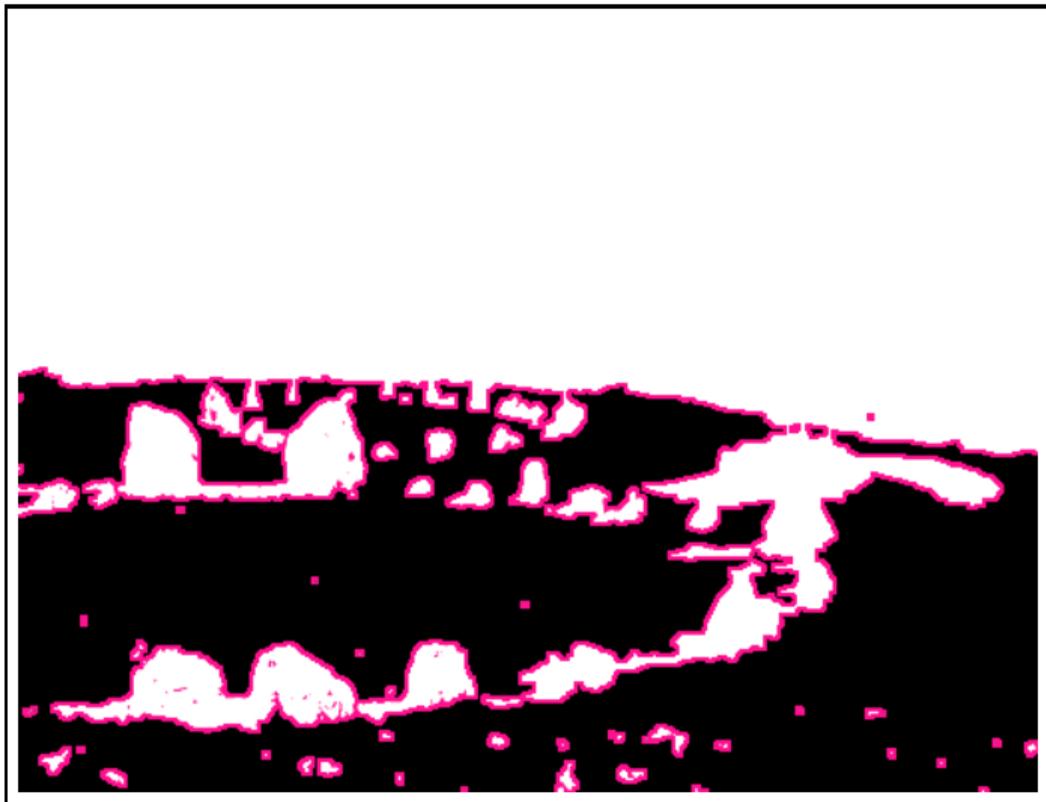
★ Amélioration d'un masque



★ Amélioration d'un masque



★ Amélioration d'un masque



★ Amélioration d'un masque



★ Amélioration d'un masque (2)



Remarque. On peut également prendre la **convention inverse** : l'ensemble M des points à traiter (points du masque) est l'ensemble des **points blancs**. Que devient la réponse dans ce cas ?

A	érosion
B	dilatation
C	érosion puis dilatation
D	dilatation puis érosion

★ Amélioration d'un masque (2)



Remarque. On peut également prendre la **convention inverse** : l'ensemble M des points à traiter (points du masque) est l'ensemble des **points blancs**. Que devient la réponse dans ce cas ?

- A érosion
- B dilatation
- C érosion puis dilatation
- D dilatation puis érosion**

○ **Exemple 2 : construction d'une frontière épaisse de région**

- ▶ application : construction d'un masque M permettant de restreindre un traitement à la transition entre deux régions
- ▶ bande entourant la frontière d'une région R



○ Exemple 2 : construction d'une frontière épaisse de région

- ▶ application : construction d'un masque M permettant de restreindre un traitement à la transition entre deux régions
- ▶ bande entourant la frontière d'une région R



R



○ Exemple 2 : construction d'une frontière épaisse de région

- ▶ application : construction d'un masque M permettant de restreindre un traitement à la transition entre deux régions
- ▶ bande entourant la frontière d'une région R : différence entre dilatation et érosion avec un élément structurant circulaire



R

- ▶ exemple : lissage de la zone de transition (antialiasing)
- ▶ taille de l'ES : paramétrage de l'épaisseur de la bande

○ **Exemple 2 : construction d'une frontière épaisse de région**

- ▶ application : construction d'un masque M permettant de restreindre un traitement à la transition entre deux régions
- ▶ bande entourant la frontière d'une région R : différence entre dilatation et érosion avec un élément structurant circulaire



— : $\delta(R)$ ■ : $\varepsilon(R)$

- ▶ exemple : lissage de la zone de transition (antialiasing)
- ▶ taille de l'ES : paramétrage de l'épaisseur de la bande

○ **Exemple 2 : construction d'une frontière épaisse de région**

- ▶ application : construction d'un masque M permettant de restreindre un traitement à la transition entre deux régions
- ▶ bande entourant la frontière d'une région R : différence entre dilatation et érosion avec un élément structurant circulaire

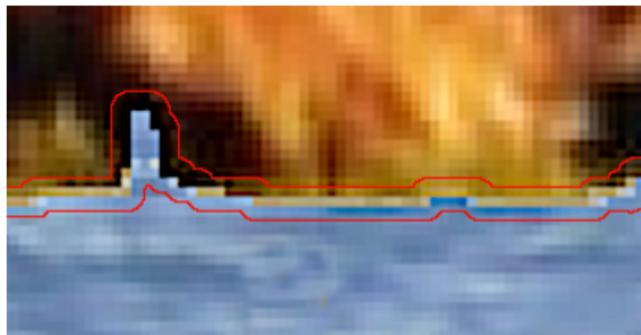


$$M = \delta(R) - \varepsilon(R)$$

- ▶ exemple : lissage de la zone de transition (antialiasing)
- ▶ taille de l'ES : paramétrage de l'épaisseur de la bande

○ **Exemple 2 : construction d'une frontière épaisse de région**

- ▶ application : construction d'un masque M permettant de restreindre un traitement à la transition entre deux régions
- ▶ bande entourant la frontière d'une région R : différence entre dilatation et érosion avec un élément structurant circulaire



$$M = \delta(R) - \varepsilon(R)$$

- ▶ exemple : lissage de la zone de transition (antialiasing)
- ▶ taille de l'ES : paramétrage de l'épaisseur de la bande

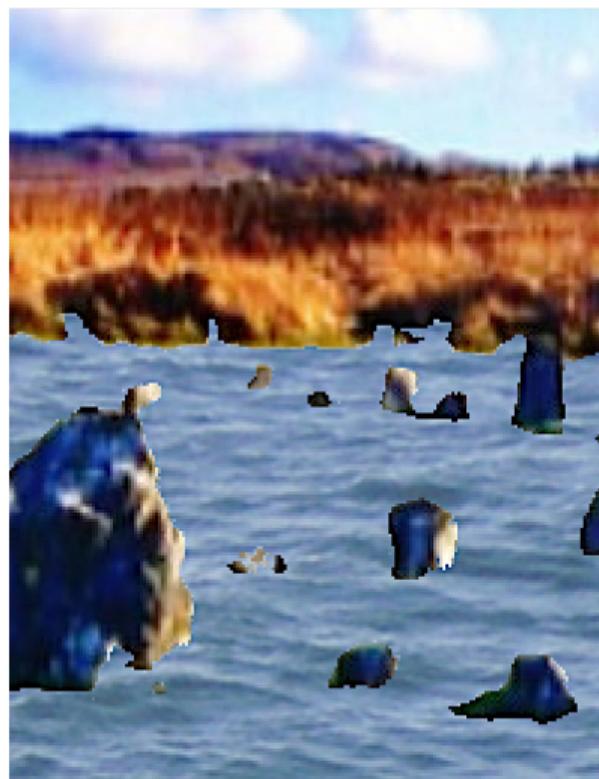
○ Exemple 2 : construction d'une frontière épaisse de région

- ▶ application : construction d'un masque M permettant de restreindre un traitement à la transition entre deux régions
- ▶ bande entourant la frontière d'une région R : différence entre dilatation et érosion avec un élément structurant circulaire



$$M = \delta(R) - \varepsilon(R)$$

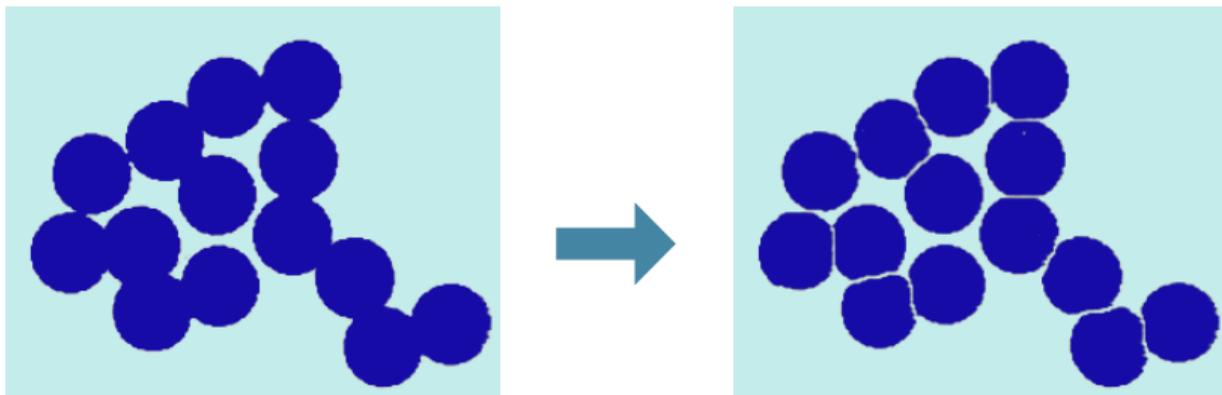
- ▶ exemple : lissage de la zone de transition (antialiasing)
- ▶ taille de l'ES : paramétrage de l'épaisseur de la bande





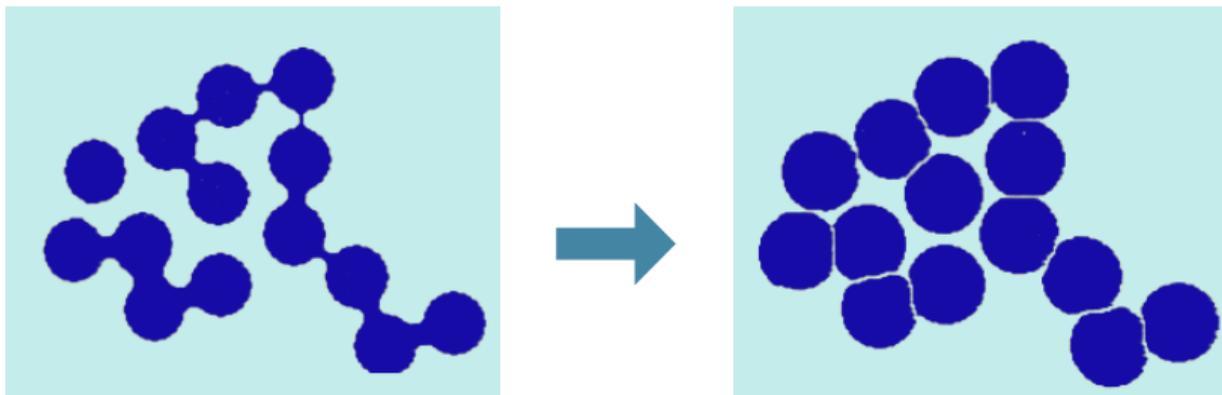


○ Exemple 3 : ajout de contraintes



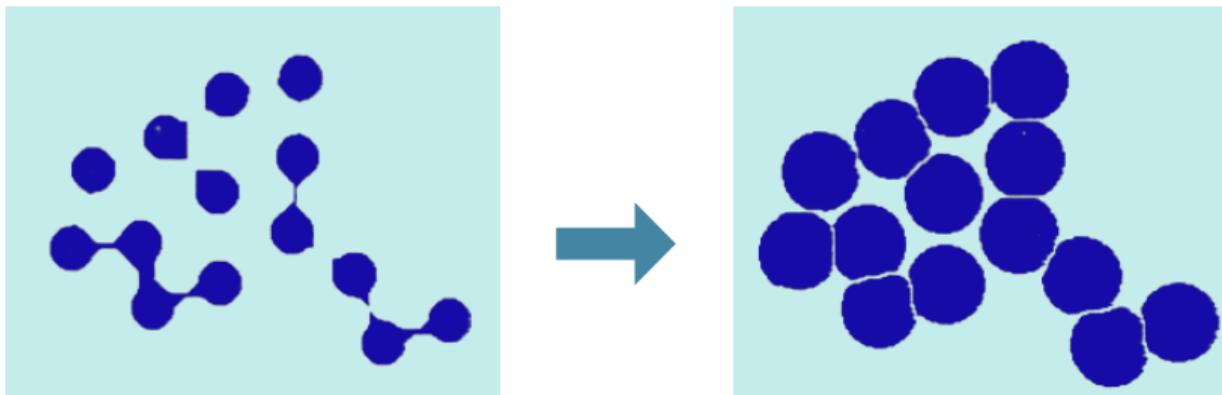
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections

○ Exemple 3 : ajout de contraintes



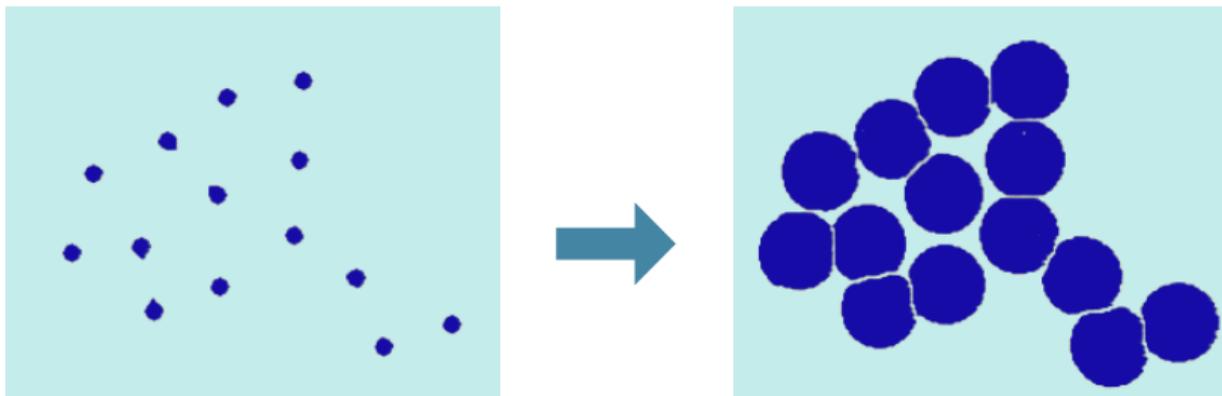
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections

○ Exemple 3 : ajout de contraintes



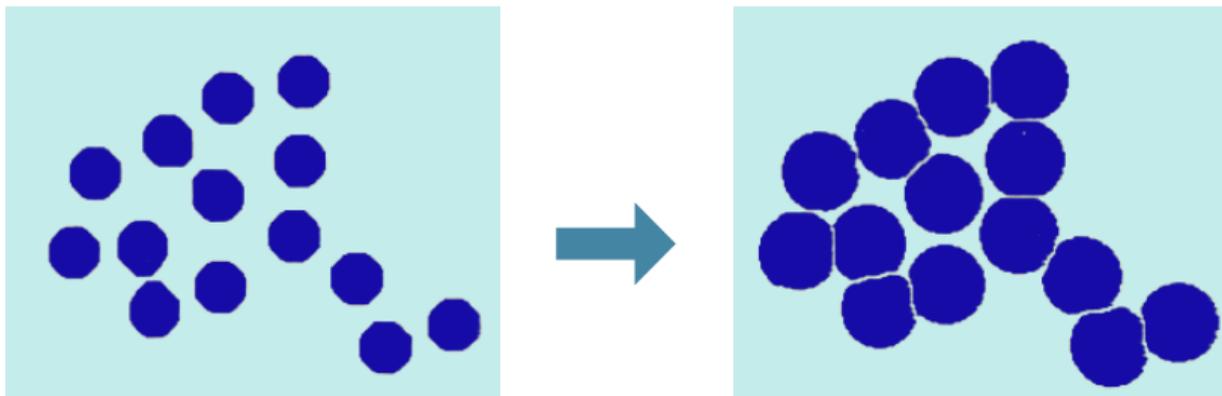
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections

○ Exemple 3 : ajout de contraintes



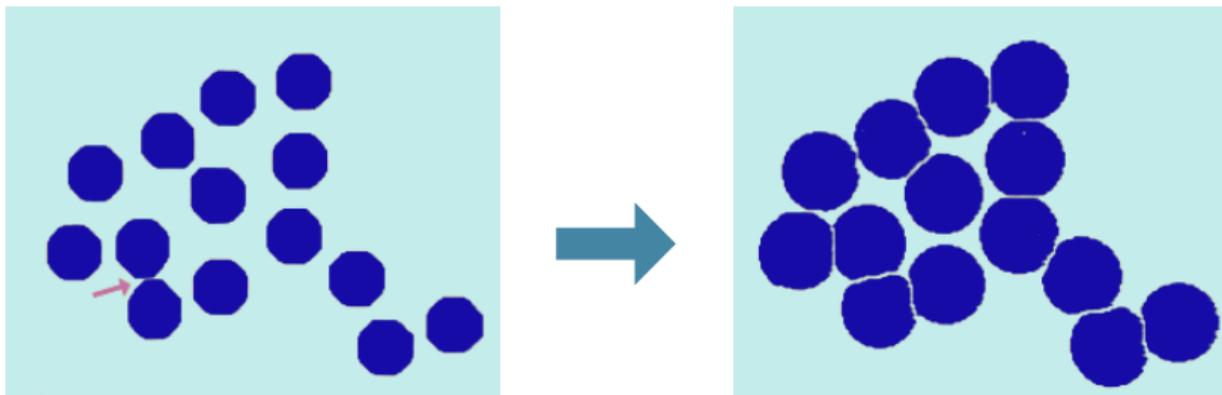
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections

○ Exemple 3 : ajout de contraintes

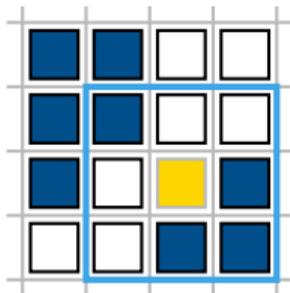


- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnexions

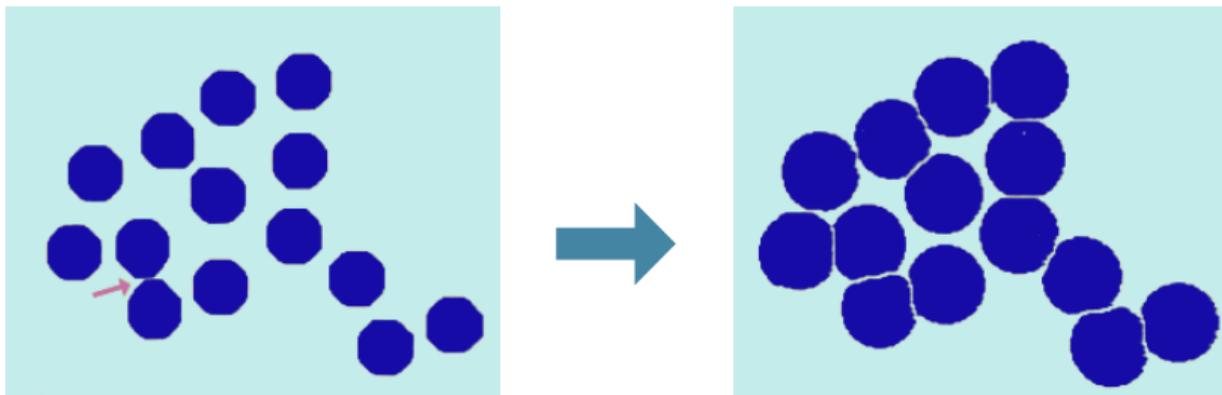
○ Exemple 3 : ajout de contraintes



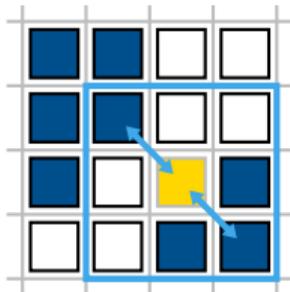
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections



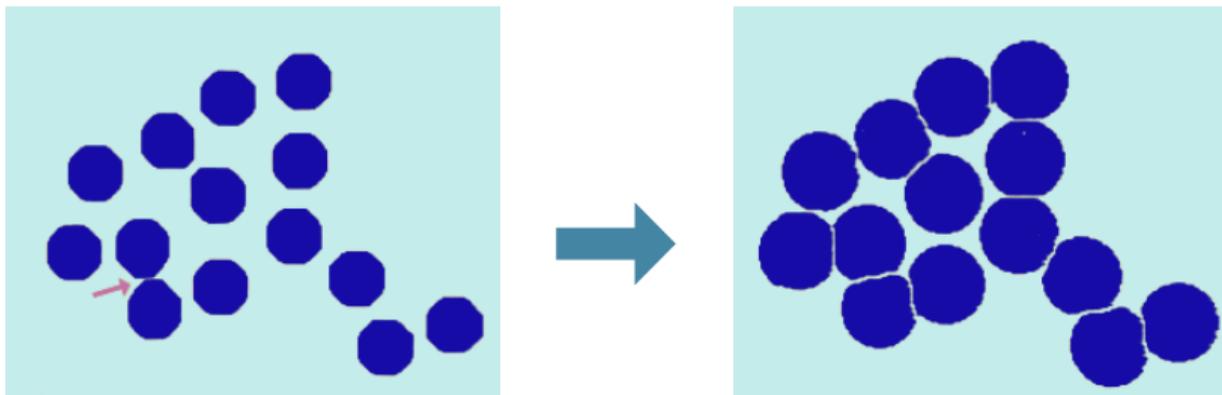
○ Exemple 3 : ajout de contraintes



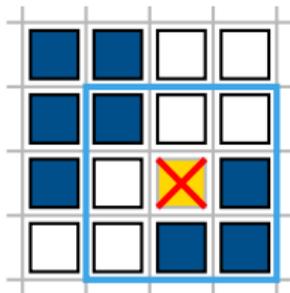
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections



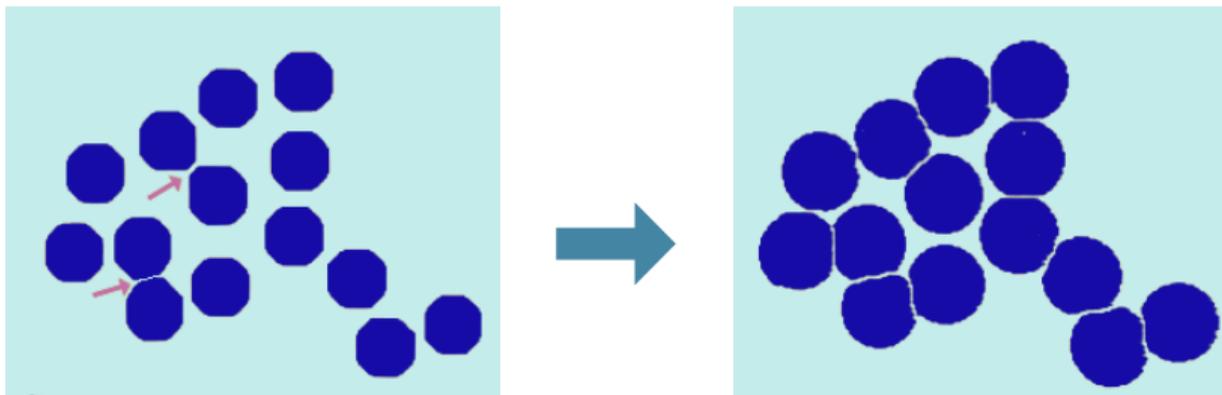
○ Exemple 3 : ajout de contraintes



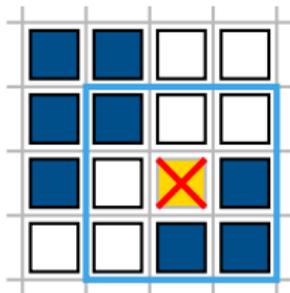
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections



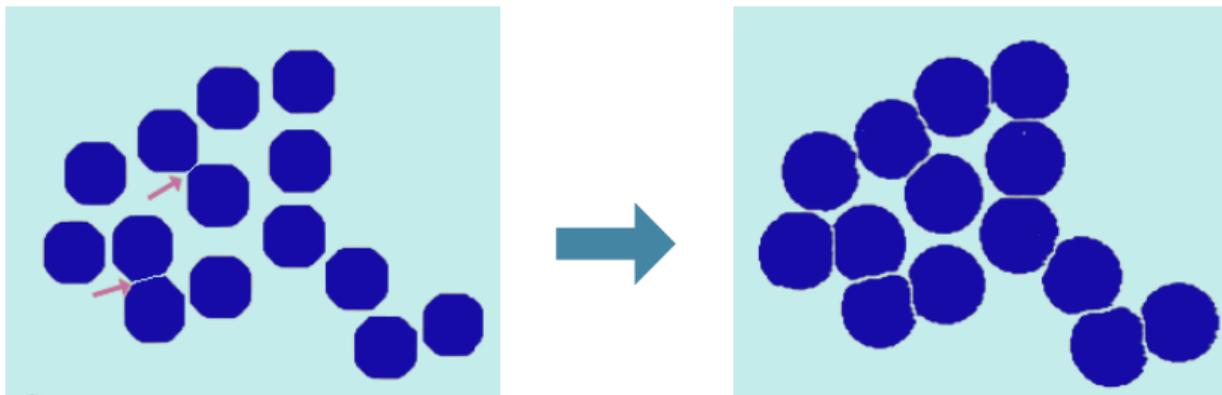
○ Exemple 3 : ajout de contraintes



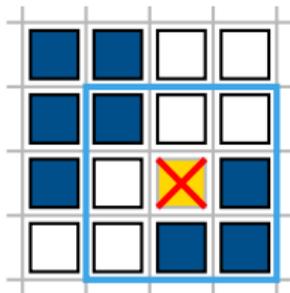
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections



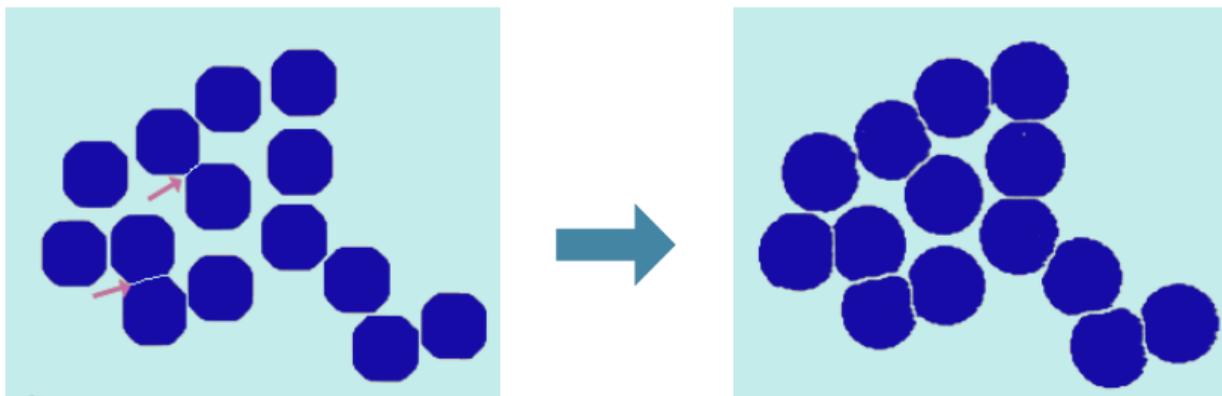
○ Exemple 3 : ajout de contraintes



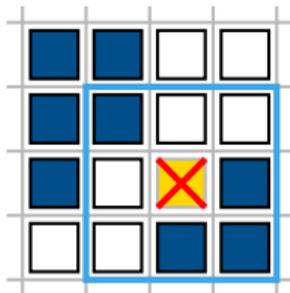
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections



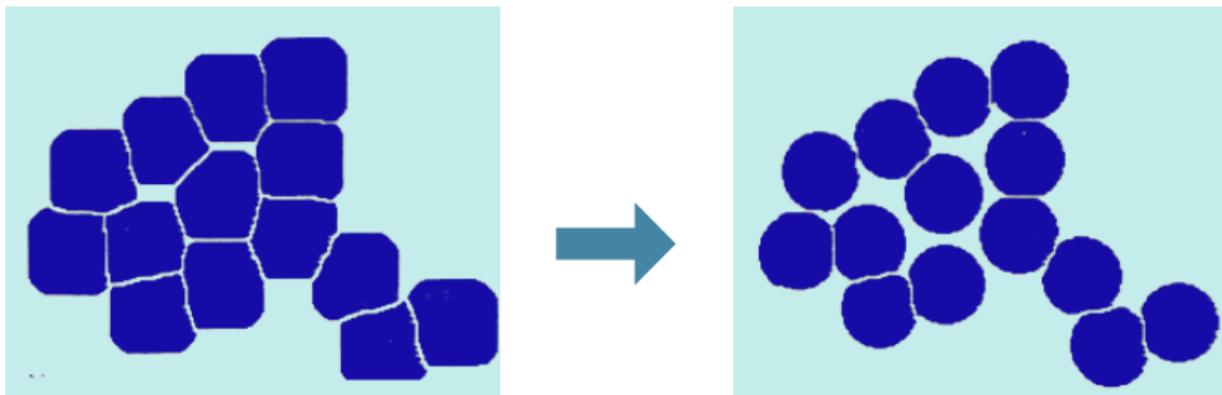
○ Exemple 3 : ajout de contraintes



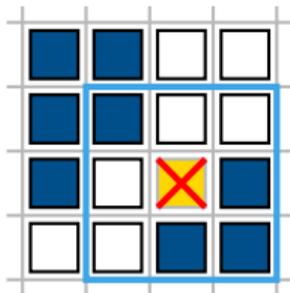
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections



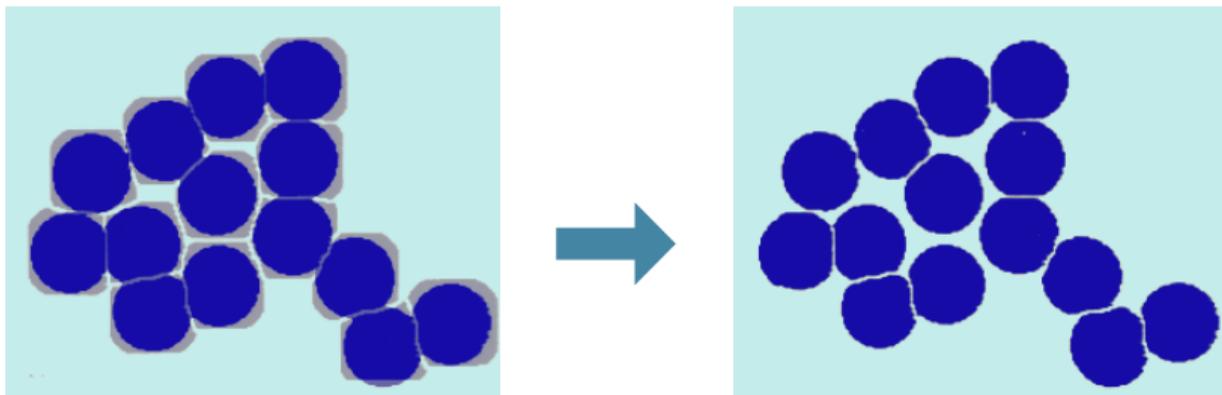
○ Exemple 3 : ajout de contraintes



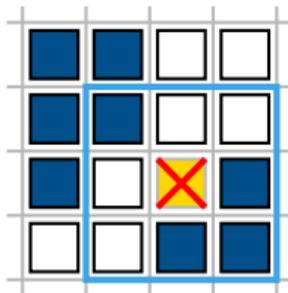
- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections



○ Exemple 3 : ajout de contraintes



- ▶ application à la séparation d'objets circulaires
- ▶ réduction de chaque objet à son centre par itération d'érosions
- ▶ restauration des formes initiales par itération de dilatations
- ▶ ajout de contraintes topologiques pour empêcher les reconnections



3. Opérateurs d'ouverture et de fermeture

3.1. Principe

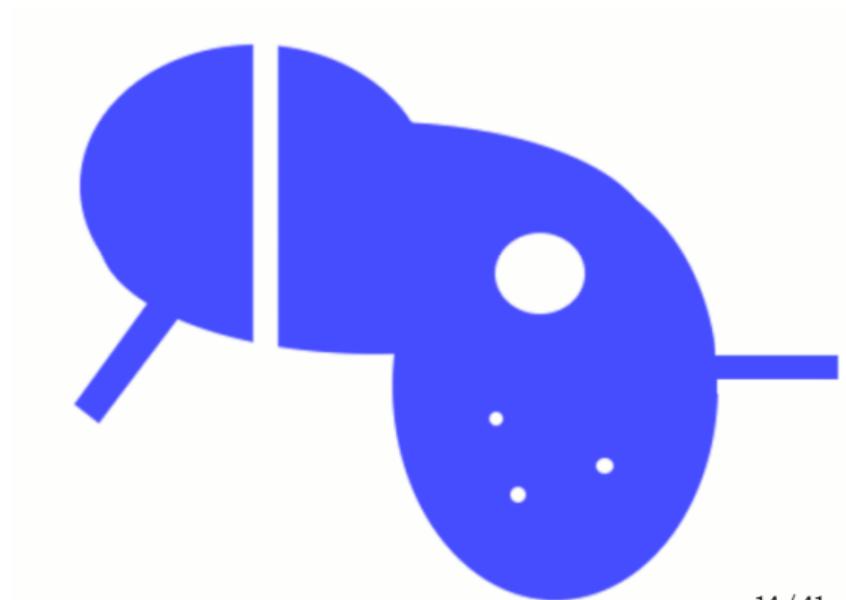
- ▶ les primitives δ et ε permettent de supprimer des détails mais **modifient les frontières**
- ▶ solution pour préserver les frontières : **combiner érosion et dilatation** :
 - deux nouvelles primitives : $\delta \circ \varepsilon$ et $\varepsilon \circ \delta$
 - même élément structurant à une **transposition** près : seconde opération effectuée dans la **direction opposée**

- ▶ **ouverture (morphologique)** par un élément structurant X

$$\gamma_X = \delta_{\check{X}} \circ \varepsilon_X$$

- ▶ **fermeture (morphologique)** par un élément structurant X

$$\varphi_X = \varepsilon_{\check{X}} \circ \delta_X$$



3. Opérateurs d'ouverture et de fermeture

3.1. Principe

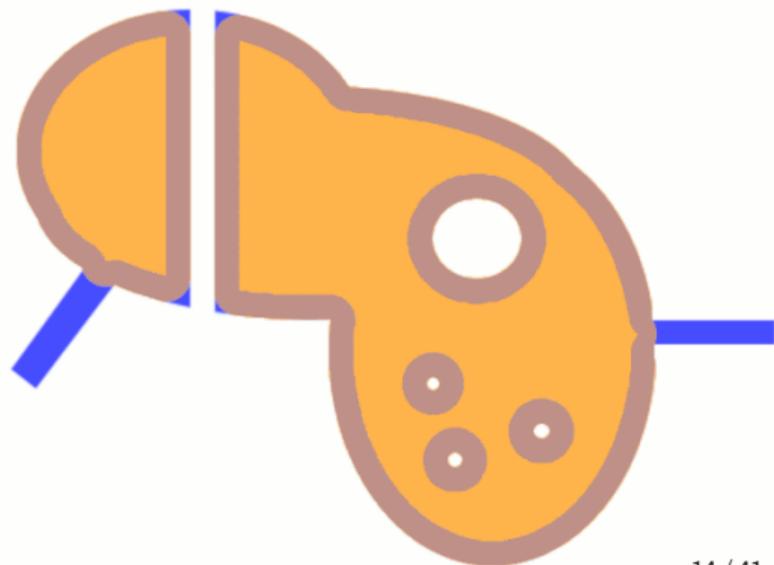
- ▶ les primitives δ et ε permettent de supprimer des détails mais **modifient les frontières**
- ▶ solution pour préserver les frontières : **combiner érosion et dilatation** :
 - deux nouvelles primitives : $\delta \circ \varepsilon$ et $\varepsilon \circ \delta$
 - même élément structurant à une **transposition** près : seconde opération effectuée dans la **direction opposée**

- ▶ **ouverture (morphologique)** par un élément structurant X

$$\gamma_X = \delta_{\check{X}} \circ \varepsilon_X$$

- ▶ **fermeture (morphologique)** par un élément structurant X

$$\varphi_X = \varepsilon_{\check{X}} \circ \delta_X$$



3. Opérateurs d'ouverture et de fermeture

3.1. Principe

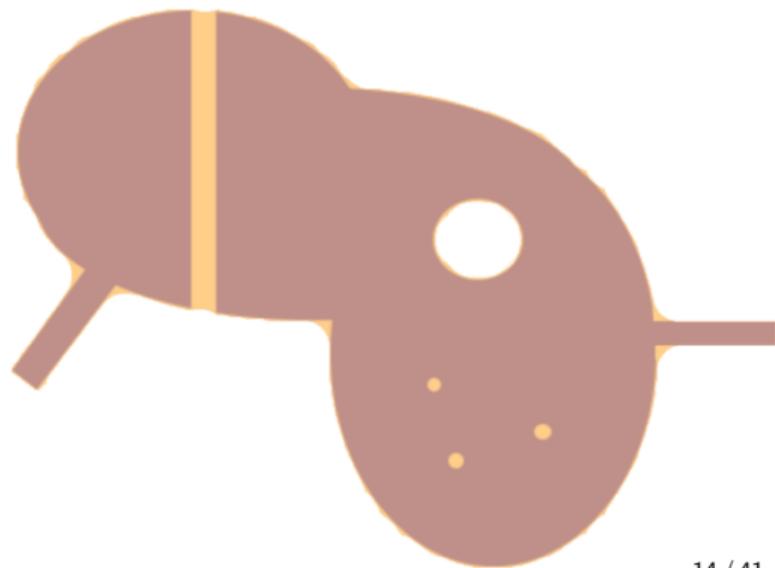
- ▶ les primitives δ et ε permettent de supprimer des détails mais **modifient les frontières**
- ▶ solution pour préserver les frontières : **combiner érosion et dilatation** :
 - deux nouvelles primitives : $\delta \circ \varepsilon$ et $\varepsilon \circ \delta$
 - même élément structurant à une **transposition** près : seconde opération effectuée dans la **direction opposée**

- ▶ **ouverture (morphologique)** par un élément structurant X

$$\gamma_X = \delta_{\check{X}} \circ \varepsilon_X$$

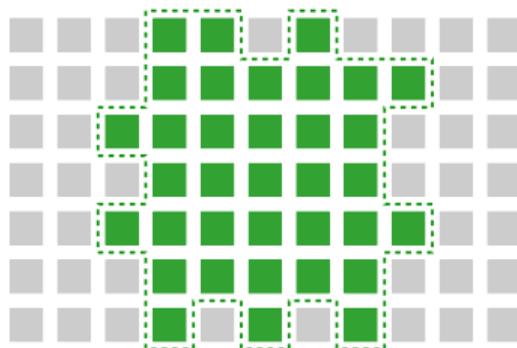
- ▶ **fermeture (morphologique)** par un élément structurant X

$$\varphi_X = \varepsilon_{\check{X}} \circ \delta_X$$



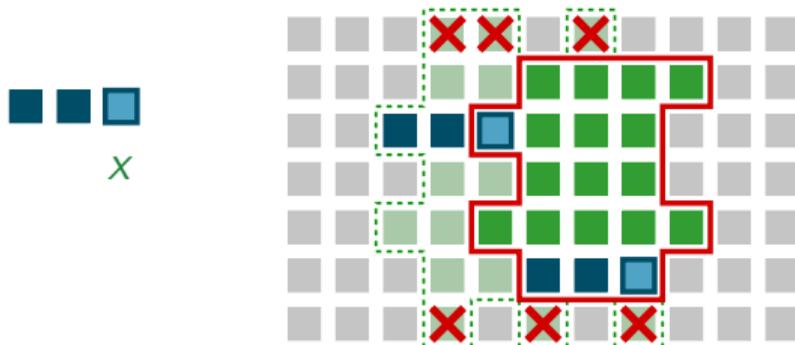
○ **Nécessité de transposer l'ES s'il n'est pas symétrique**

- ▶ exemple : ouverture de l'ensemble des points verts par l'ES X
- ▶ érosion par X : modification du bord gauche (bord droit inchangé)
- ▶ dilatation par X : modification du bord droit
- ▶ pour restaurer le bord gauche : dilatation par \check{X}



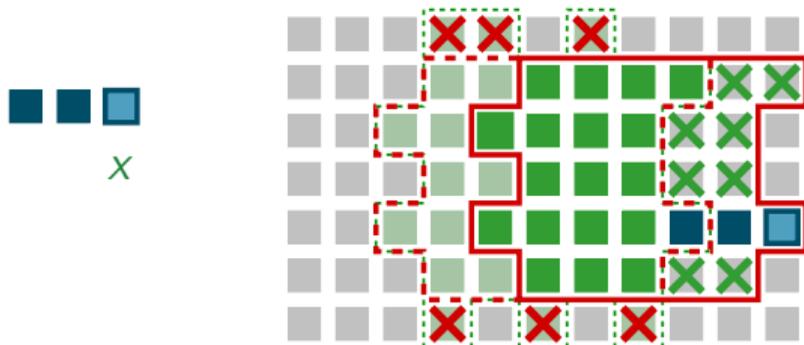
○ **Nécessité de transposer l'ES s'il n'est pas symétrique**

- ▶ exemple : ouverture de l'ensemble des points verts par l'ES X
- ▶ érosion par X : modification du bord gauche (bord droit inchangé)
- ▶ dilatation par X : modification du bord droit
- ▶ pour restaurer le bord gauche : dilatation par \check{X}



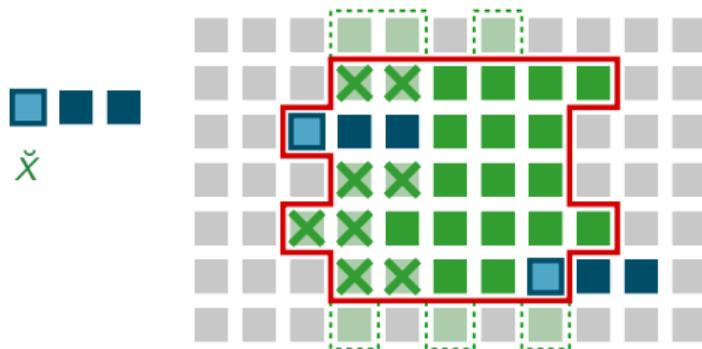
○ **Nécessité de transposer l'ES s'il n'est pas symétrique**

- ▶ exemple : ouverture de l'ensemble des points verts par l'ES X
- ▶ érosion par X : modification du bord gauche (bord droit inchangé)
- ▶ dilatation par X : modification du bord droit
- ▶ pour restaurer le bord gauche : dilatation par \check{X}



○ **Nécessité de transposer l'ES s'il n'est pas symétrique**

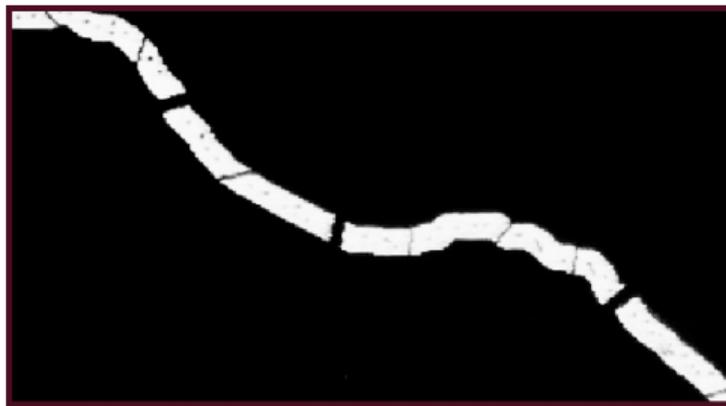
- ▶ exemple : ouverture de l'ensemble des points verts par l'ES X
- ▶ érosion par X : modification du bord gauche (bord droit inchangé)
- ▶ dilatation par X : modification du bord droit
- ▶ pour restaurer le bord gauche : dilatation par \check{X}



3.2. Exemples d'ouvertures et fermetures

○ Connexion d'un ensemble de points

- ▶ fermeture de l'ensemble des points blancs au moyen d'un élément structurant circulaire
- ▶ la taille de l'ES permet de paramétrer le résultat



3.2. Exemples d'ouvertures et fermetures

○ Connexion d'un ensemble de points

- ▶ fermeture de l'ensemble des points blancs au moyen d'un élément structurant circulaire
- ▶ la taille de l'ES permet de paramétrer le résultat



3.2. Exemples d'ouvertures et fermetures

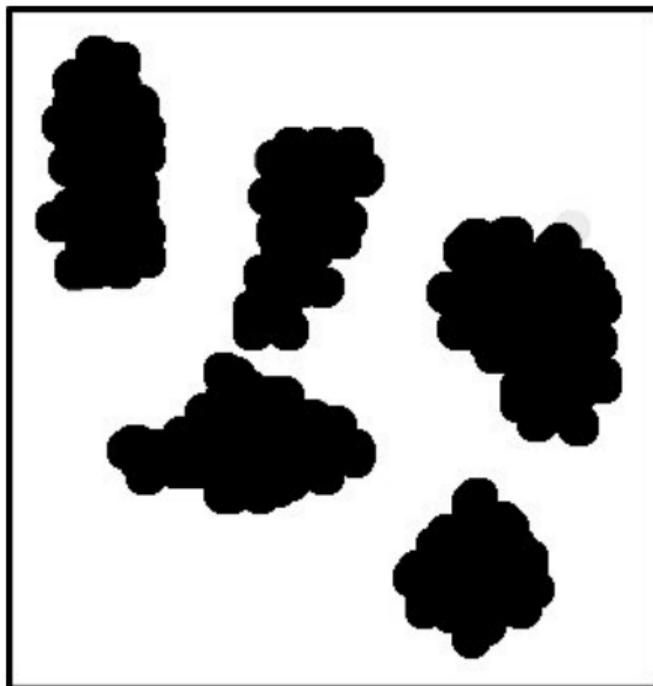
○ Connexion d'un ensemble de points

- ▶ fermeture de l'ensemble des points blancs au moyen d'un élément structurant circulaire
- ▶ la taille de l'ES permet de paramétrer le résultat



○ **Frontière d'un ensemble non connexe de points**

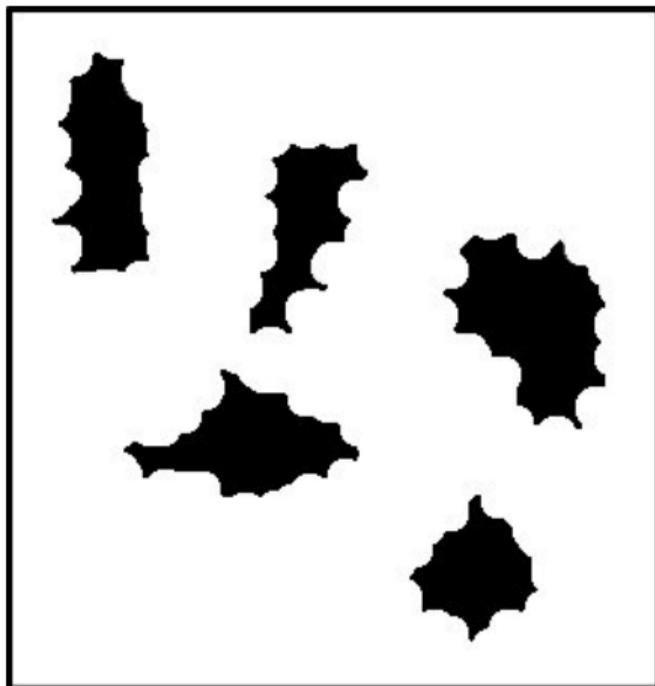
- ▶ fermeture de l'ensemble des points noirs au moyen d'un élément structurant circulaire de grande taille



dilatation + érosion

○ **Frontière d'un ensemble non connexe de points**

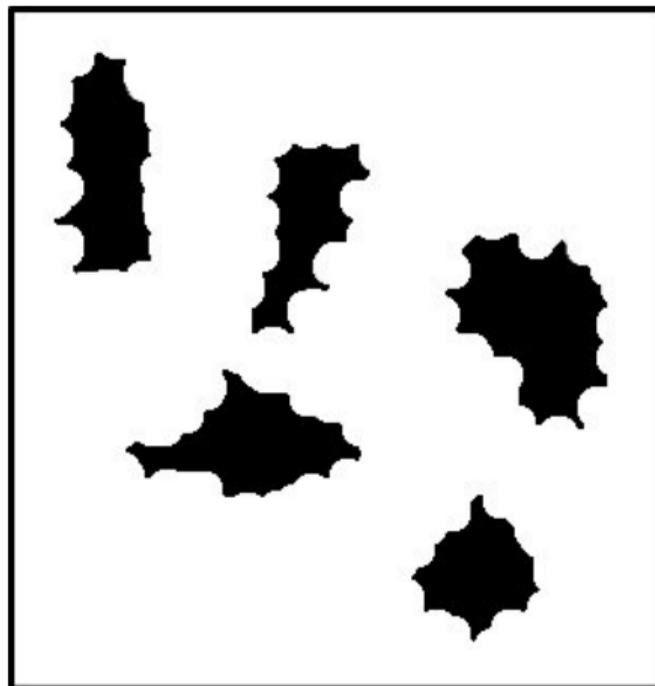
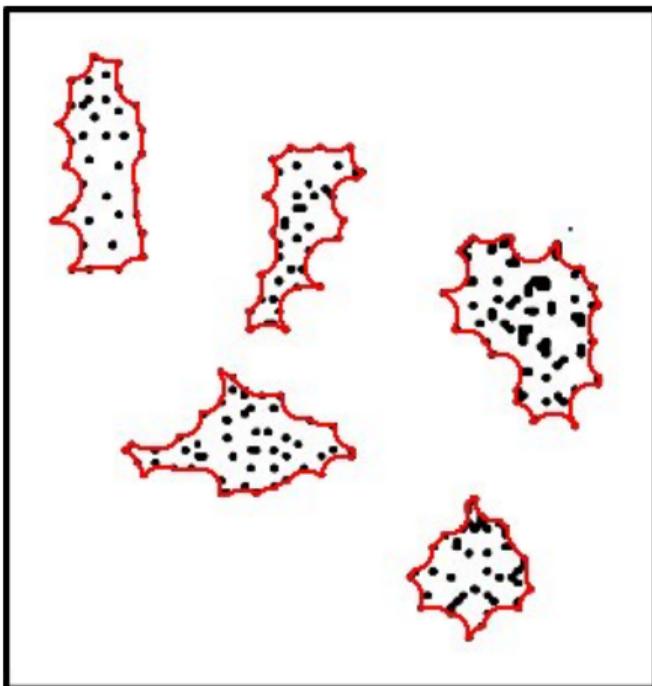
- ▶ fermeture de l'ensemble des points noirs au moyen d'un élément structurant circulaire de grande taille



dilatation + érosion

○ **Frontière d'un ensemble non connexe de points**

- ▶ fermeture de l'ensemble des points noirs au moyen d'un élément structurant circulaire de grande taille



dilatation + érosion

4. Des ensembles de points aux images binaires

4.1. Convention de couleur

- ▶ image noir et blanc \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ points noirs ou points blancs : on choisit les points blancs

4.2. Exemples d'applications

- Suppression d'éléments non significatifs
 - ▶ suppression des petites taches blanches
 - ▶ ?

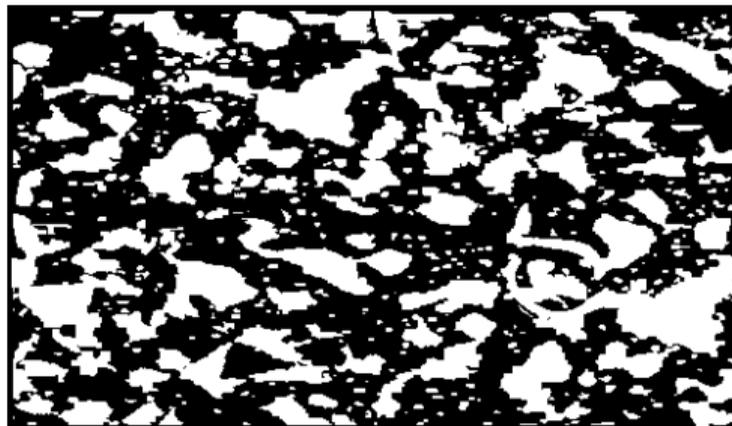
4. Des ensembles de points aux images binaires

4.2. Convention de couleur

- ▶ image noir et blanc \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ points noirs ou points blancs : on choisit les points blancs

4.2. Exemples d'applications

- Suppression d'éléments non significatifs
 - ▶ suppression des petites taches blanches
 - ▶ ?



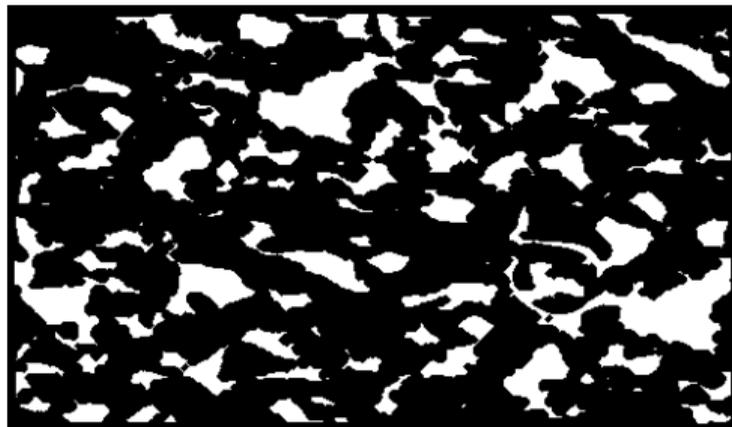
4. Des ensembles de points aux images binaires

4.2. Convention de couleur

- ▶ image noir et blanc \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ points noirs ou points blancs : on choisit les points blancs

4.2. Exemples d'applications

- **Suppression d'éléments non significatifs**
 - ▶ suppression des petites taches blanches
 - ▶ **érosion** avec un ES circulaire de diamètre supérieur à la plus grande largeur des éléments à supprimer



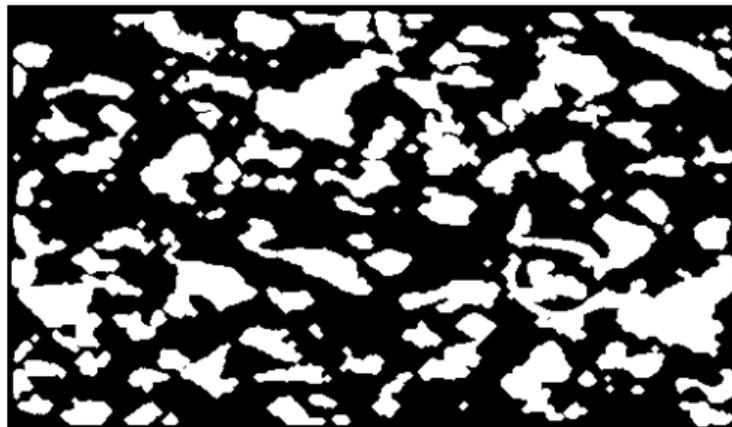
4. Des ensembles de points aux images binaires

4.2. Convention de couleur

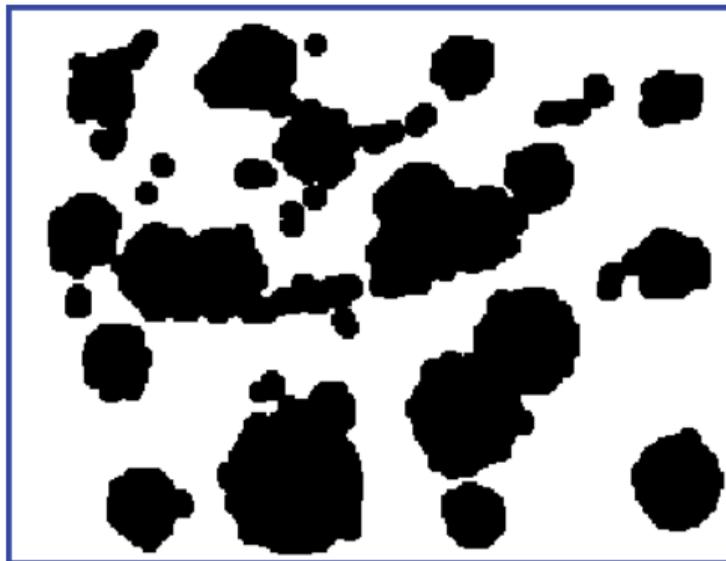
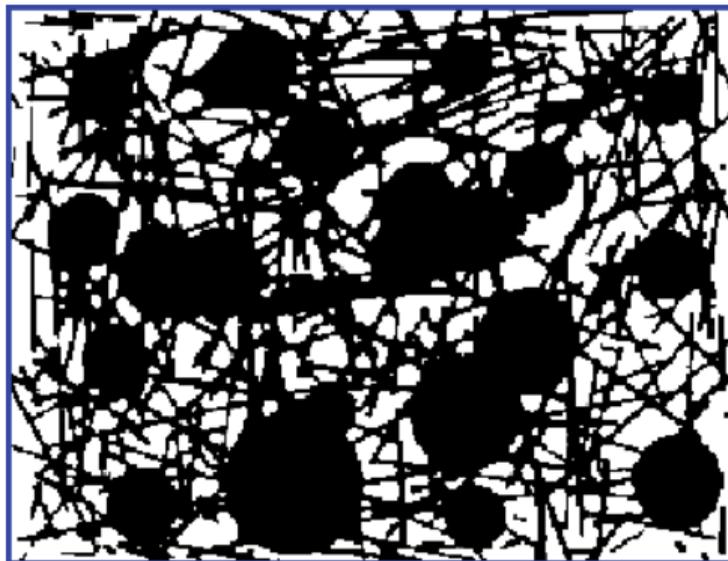
- ▶ image noir et blanc \leftrightarrow fonction caractéristique d'un ensemble
- ▶ points noirs ou points blancs : on choisit les points blancs

4.2. Exemples d'applications

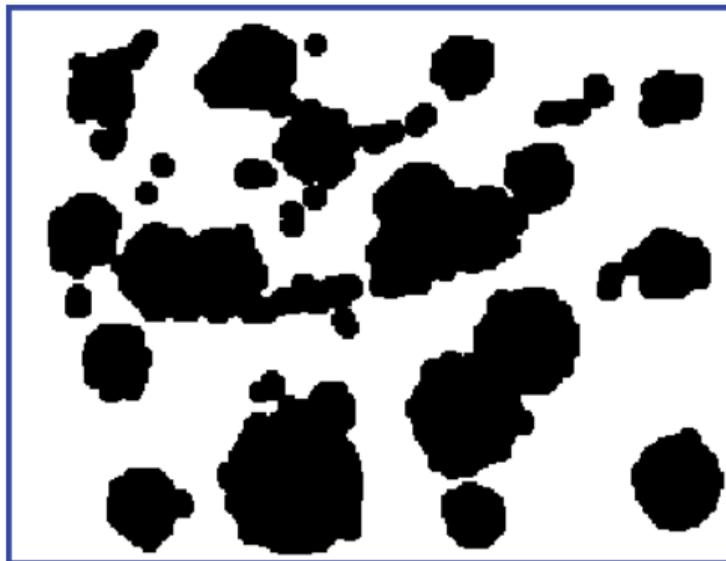
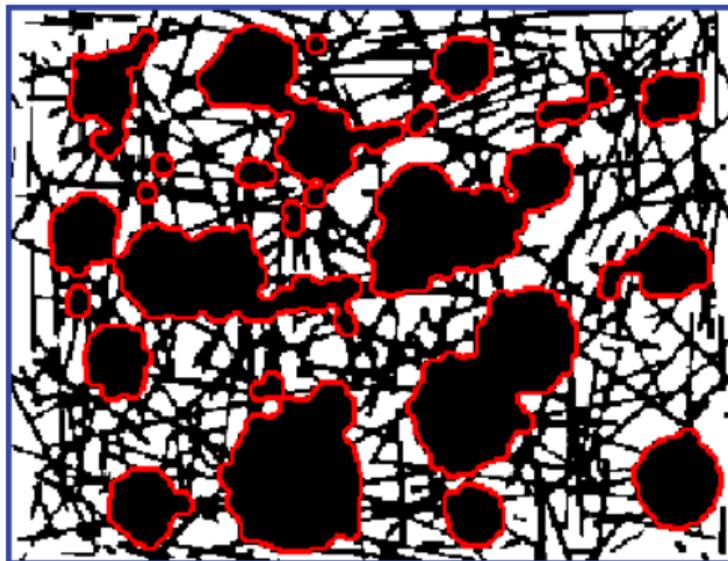
- **Suppression d'éléments non significatifs**
 - ▶ suppression des petites taches blanches
 - ▶ **érosion** avec un ES circulaire de diamètre supérieur à la plus grande largeur des éléments à supprimer + **dilatation** = **ouverture**



- ▶ suppression des traits noirs avec préservation de la taille des grosses taches
- ▶ ?



- ▶ suppression des traits noirs avec préservation de la taille des grosses taches
- ▶ fermeture avec un ES circulaire de diamètre supérieur à l'épaisseur des traits



★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs



★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



1



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs



★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



2



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs



★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



3



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs



★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



4



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



2



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



3



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



1



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

★ Opération morphologique sur une image binaire noir et blanc



4



	l_1	l_2	l_3	l_4
A	φ	ε	δ	γ
B	γ	ε	δ	φ
C	ε	φ	γ	δ
D	δ	φ	γ	ε

convention : points blancs

- **Extraction d'éléments significatifs d'une image seuillée**

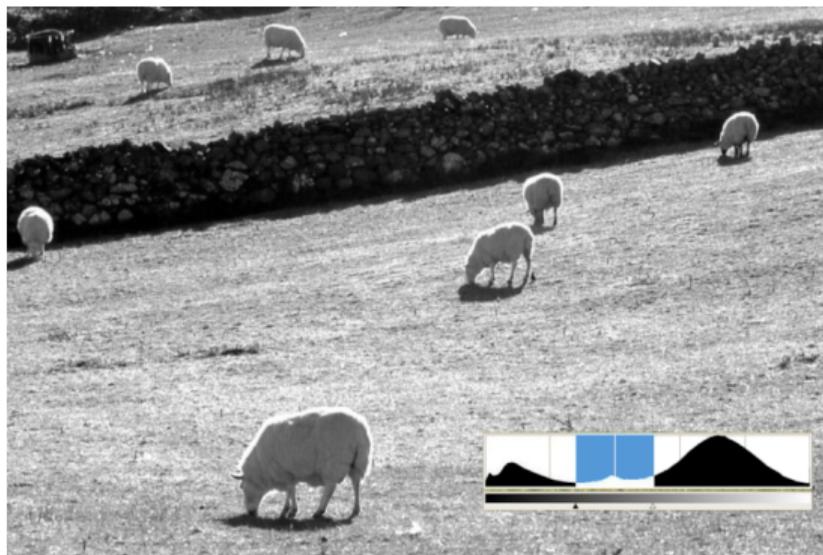
- ▶ image seuillée selon la luminance (canal V)



- ▶ éliminer les zones blanches non significatives :
- ▶ fermeture pour reconnecter

- **Extraction d'éléments significatifs d'une image seuillée**

- ▶ image seuillée selon la luminance (canal V)



- ▶ éliminer les zones blanches non significatives :
- ▶ fermeture pour reconnecter

- **Extraction d'éléments significatifs d'une image seuillée**

- ▶ image seuillée selon la luminance (canal V)



- ▶ éliminer les zones blanches non significatives :

- ▶ fermeture pour reconnecter

- **Extraction d'éléments significatifs d'une image seuillée**
 - ▶ image seuillée selon la luminance (canal V)



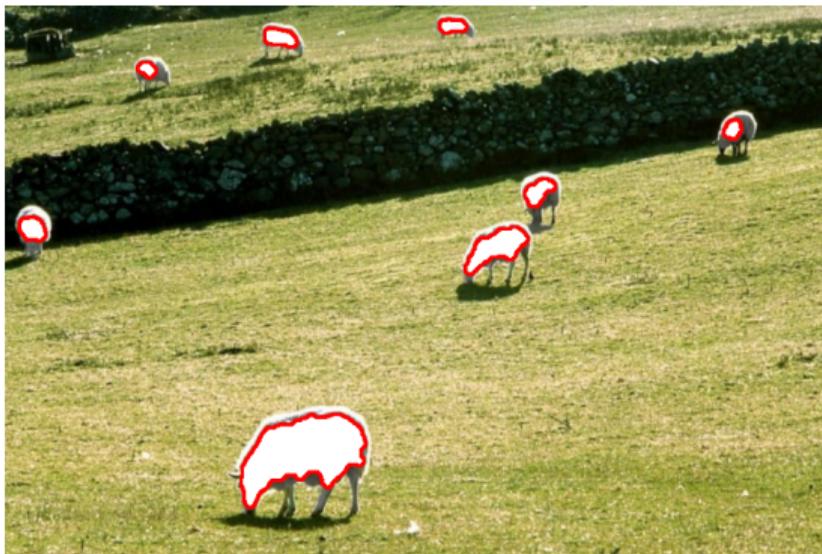
- ▶ éliminer les zones blanches non significatives : **ouverture**
- ▶ **fermeture** pour reconnecter

- **Extraction d'éléments significatifs d'une image seuillée**
 - ▶ image seuillée selon la luminance (canal V)



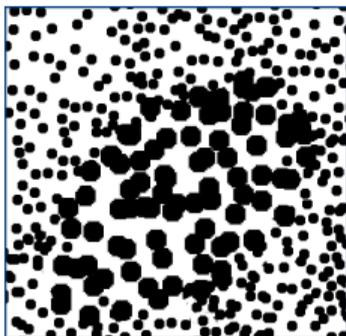
- ▶ éliminer les zones blanches non significatives : **ouverture**
- ▶ **fermeture** pour reconnecter

- **Extraction d'éléments significatifs d'une image seuillée**
 - ▶ image seuillée selon la luminance (canal V)

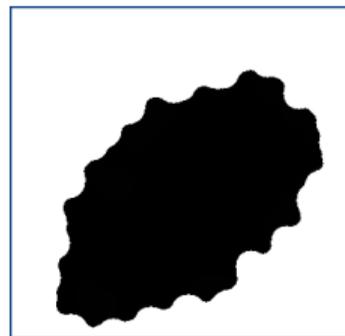


- ▶ éliminer les zones blanches non significatives : **ouverture**
- ▶ **fermeture** pour reconnecter

★ Extraction d'un objet diffus par filtrage morphologique



I_1



$\Psi(I_1)$

L'image $\Psi(I_1)$ peut-elle être obtenue en appliquant :



A

une ouverture

B

une fermeture



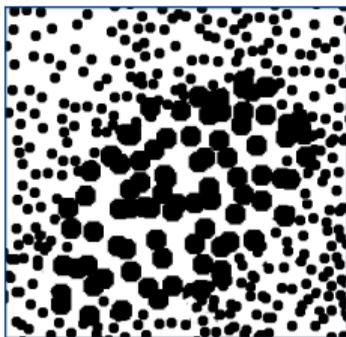
C

une ouverture suivie d'une fermeture

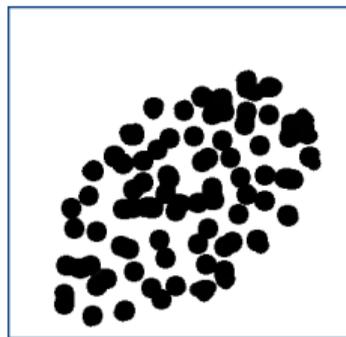
D

une fermeture suivie d'une ouverture

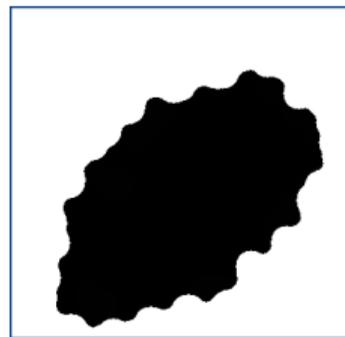
★ Extraction d'un objet diffus par filtrage morphologique



I_1



$\varphi(I_1)$



$\gamma(\varphi(I_1))$

L'image $\Psi(I_1)$ peut-elle être obtenue en appliquant :

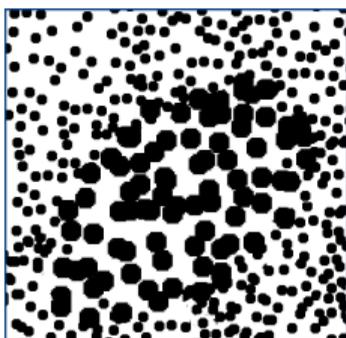
A une ouverture

C une ouverture suivie d'une fermeture

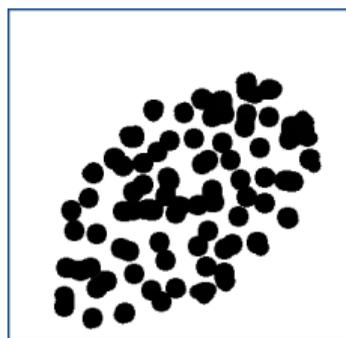
B une fermeture

D une fermeture suivie d'une ouverture

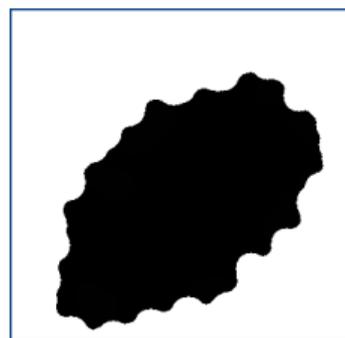
★ Extraction d'un objet diffus par filtrage morphologique



I_1



$\varphi(I_1)$



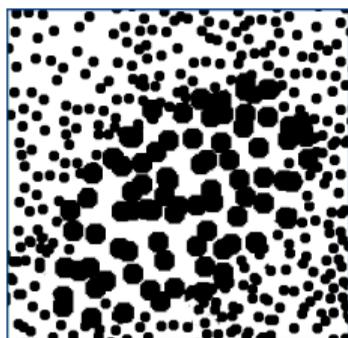
$\gamma(\varphi(I_1))$

L'image I_1 est composée de disques noirs de 10 et 20 points de diamètre.
On note X_φ et X_γ les éléments structurants utilisés respectivement pour la fermeture et pour l'ouverture.

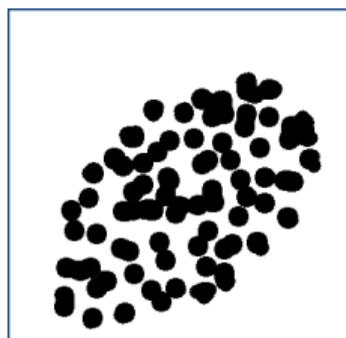
- A** tailles de X_φ et $X_\gamma \simeq 15$ points
- B** tailles de X_φ et $X_\gamma \simeq 30$ points

- C** tailles de X_φ et $X_\gamma \simeq 30$ et 15 points
- D** tailles de X_φ et $X_\gamma \simeq 15$ et 30 points

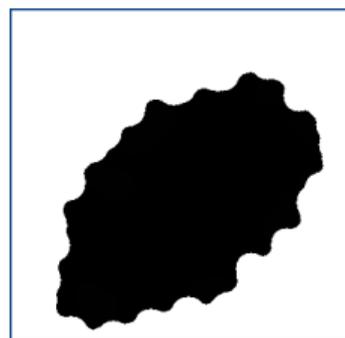
★ Extraction d'un objet diffus par filtrage morphologique



I_1



$\varphi(I_1)$



$\gamma(\varphi(I_1))$

L'image I_1 est composée de disques noirs de 10 et 20 points de diamètre.
On note X_φ et X_γ les éléments structurants utilisés respectivement pour la fermeture et pour l'ouverture.

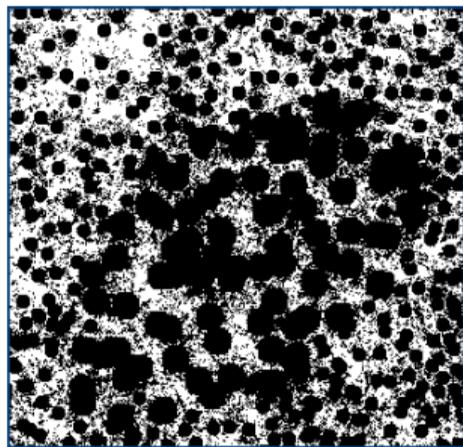
A tailles de X_φ et $X_\gamma \simeq 15$ points

B tailles de X_φ et $X_\gamma \simeq 30$ points

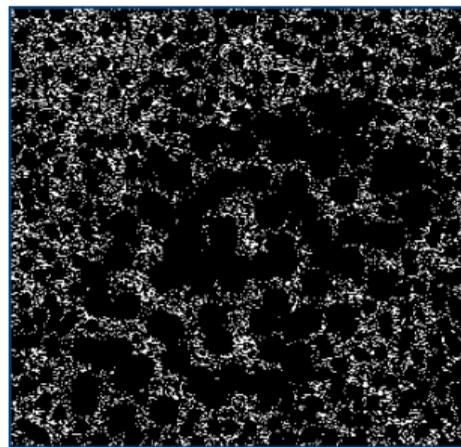
C tailles de X_φ et $X_\gamma \simeq 30$ et 15 points

D tailles de X_φ et $X_\gamma \simeq 15$ et 30 points

★ Extraction d'un objet diffus par filtrage morphologique



I_2



I_3

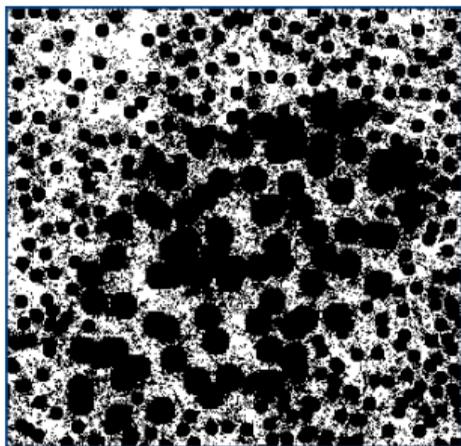
D'après vous, on peut obtenir de la même manière un résultat analogue avec

A : I_2 et I_3

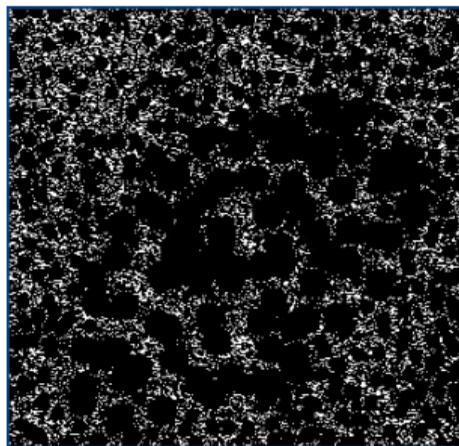
B : uniquement I_2

C : aucune des deux images

★ Extraction d'un objet diffus par filtrage morphologique



I_2



I_3

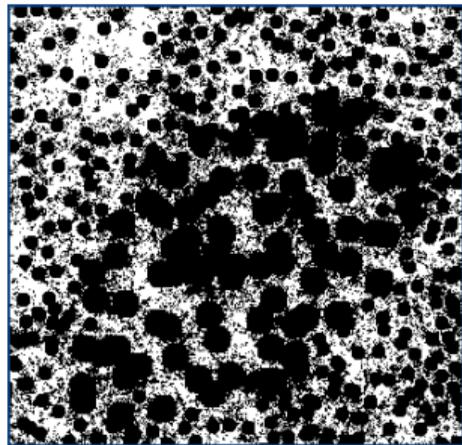
D'après vous, on peut obtenir de la même manière un résultat analogue avec

A : I_2 et I_3

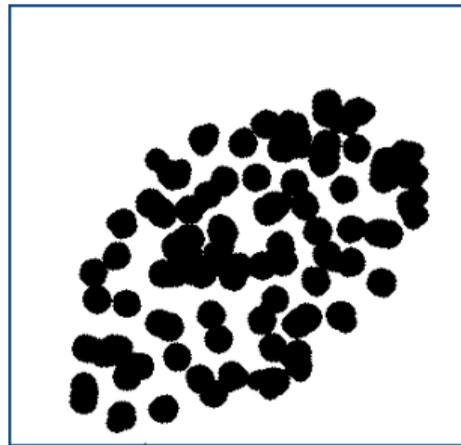
B : *uniquement I_2*

C : *aucune des deux images*

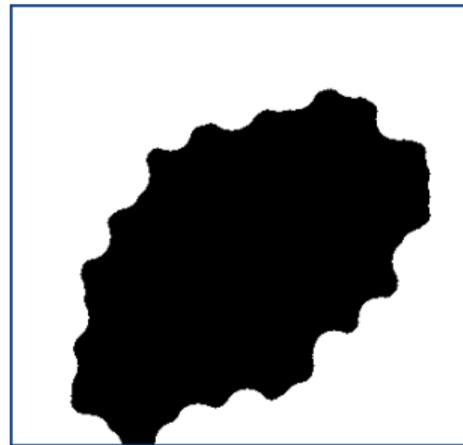
★ Extraction d'un objet diffus par filtrage morphologique



I_2

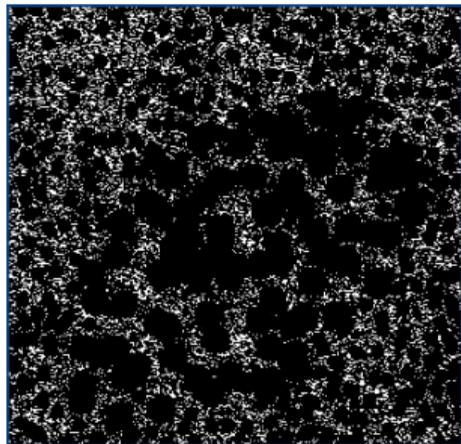


$\varphi(I_2)$

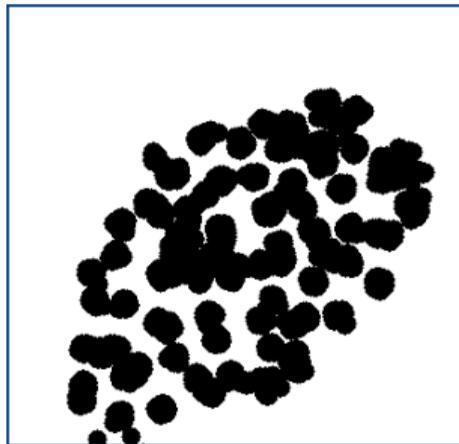


$\gamma(\varphi(I_2))$

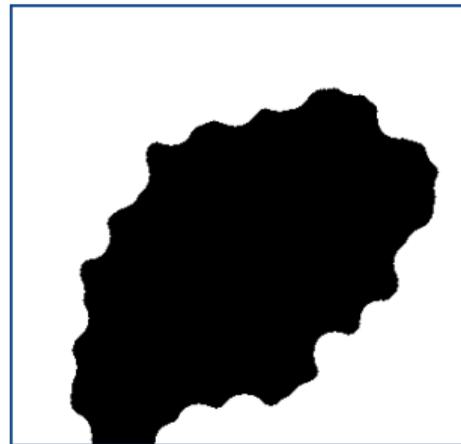
★ Extraction d'un objet diffus par filtrage morphologique



I_3



$\varphi(I_3)$



$\gamma(\varphi(I_3))$

5. Extension aux images monochromes

5.1. Définition alternative des primitives morphologique

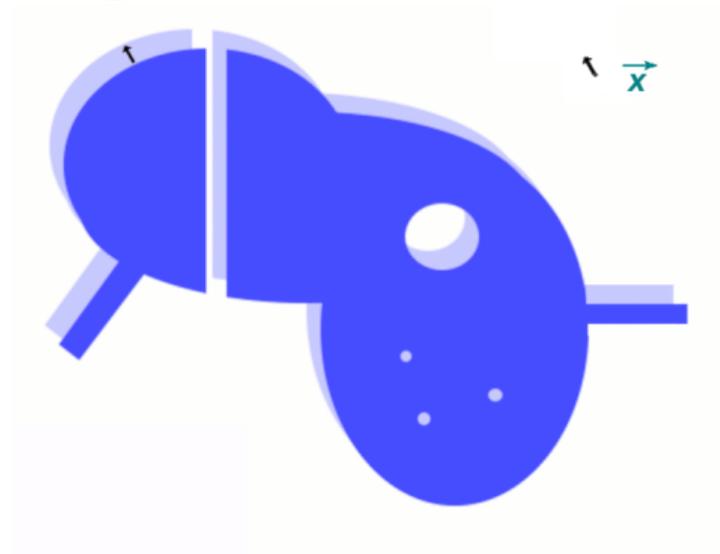
- ▶ on note $E_{-\vec{x}}$ la **translation** de E selon le vecteur \vec{x}
- ▶ $\vec{x} \in X$: vecteurs définis à partir de l'origine de l'**élément structurant** X

- ▶ **érosion**

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$

- ▶ **dilatation**

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$



- ▶ on étend cette définition aux images monochromes en construisant une **correspondance** entre \bigcap (resp. \bigcup) sur les images binaires et \min (resp. \max) sur les images

monochromes : principe de **superposition des coupes**

5. Extension aux images monochromes

5.1. Définition alternative des primitives morphologique

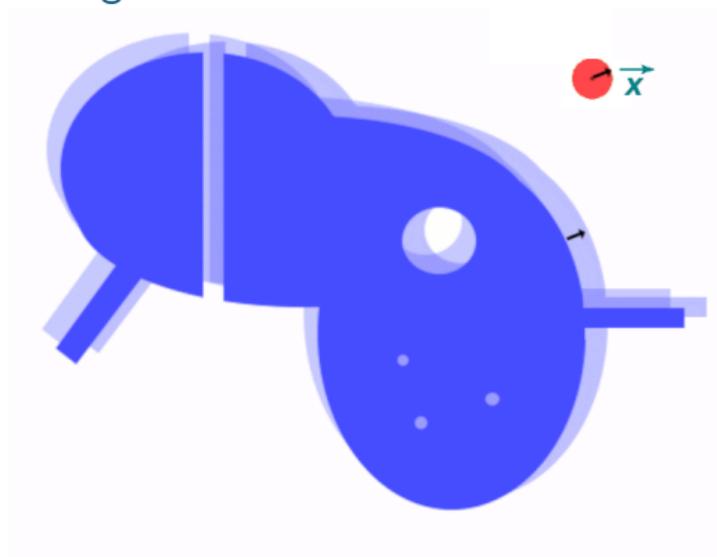
- ▶ on note $E_{-\vec{x}}$ la **translation** de E selon le vecteur \vec{x}
- ▶ $\vec{x} \in X$: vecteurs définis à partir de l'origine de l'**élément structurant** X

▶ **érosion**

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$

▶ **dilatation**

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$



- ▶ on étend cette définition aux images monochromes en construisant une **correspondance** entre \bigcap (resp. \bigcup) sur les images binaires et \min (resp. \max) sur les images monochromes : principe de **superposition des coupes**

5. Extension aux images monochromes

5.1. Définition alternative des primitives morphologique

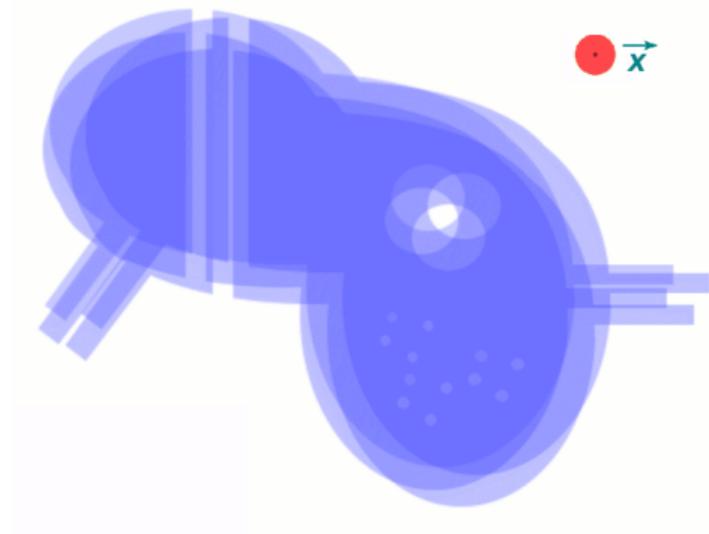
- ▶ on note $E_{-\vec{x}}$ la **translation** de E selon le vecteur \vec{x}
- ▶ $\vec{x} \in X$: vecteurs définis à partir de l'origine de l'**élément structurant** X

- ▶ **érosion**

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$

- ▶ **dilatation**

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$



- ▶ on étend cette définition aux images monochromes en construisant une **correspondance** entre \bigcap (resp. \bigcup) sur les images binaires et **min** (resp. **max**) sur les images

monochromes : principe de **superposition des coupes**

5. Extension aux images monochromes

5.1. Définition alternative des primitives morphologique

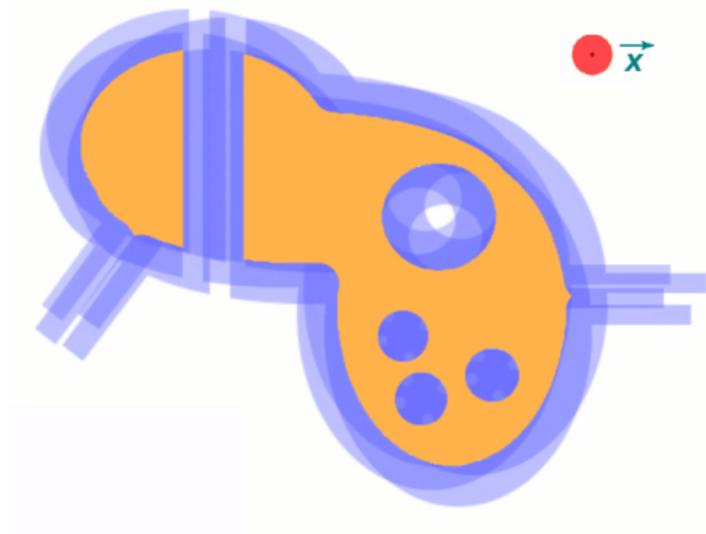
- ▶ on note $E_{-\vec{x}}$ la **translation** de E selon le vecteur \vec{x}
- ▶ $\vec{x} \in X$: vecteurs définis à partir de l'origine de l'**élément structurant** X

- ▶ **érosion**

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$

- ▶ **dilatation**

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$



- ▶ on étend cette définition aux images monochromes en construisant une **correspondance** entre \bigcap (resp. \bigcup) sur les images binaires et \min (resp. \max) sur les images

monochromes : principe de **superposition des coupes**

5. Extension aux images monochromes

5.1. Définition alternative des primitives morphologique

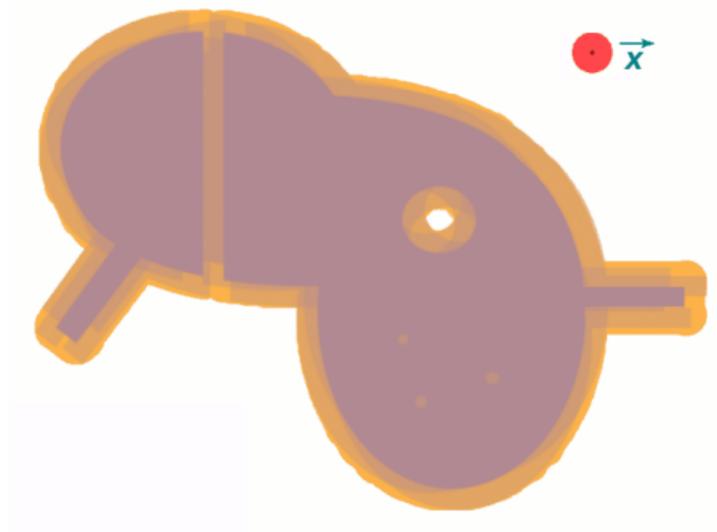
- ▶ on note $E_{-\vec{x}}$ la **translation** de E selon le vecteur \vec{x}
- ▶ $\vec{x} \in X$: vecteurs définis à partir de l'origine de l'**élément structurant** X

- ▶ **érosion**

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$

- ▶ **dilatation**

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$



- ▶ on étend cette définition aux images monochromes en construisant une **correspondance** entre \bigcap (resp. \bigcup) sur les images binaires et \min (resp. \max) sur les images monochromes : principe de **superposition des coupes**

5. Extension aux images monochromes

5.1. Définition alternative des primitives morphologique

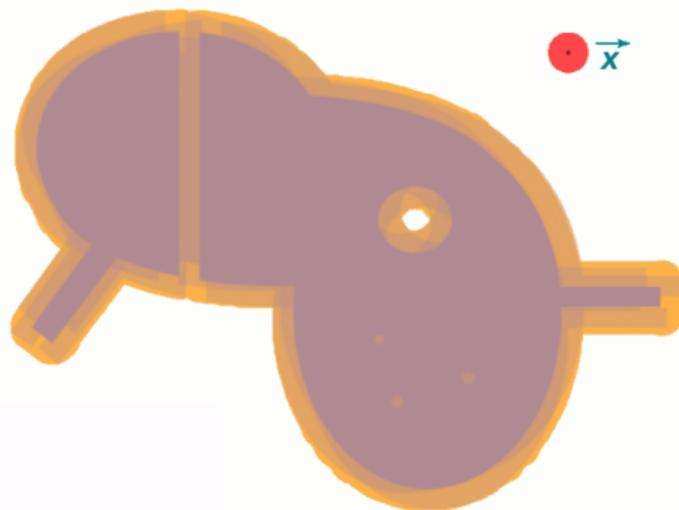
- ▶ on note $E_{-\vec{x}}$ la **translation** de E selon le vecteur \vec{x}
- ▶ $\vec{x} \in X$: vecteurs définis à partir de l'origine de l'**élément structurant** X

- ▶ **érosion**

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$

- ▶ **dilatation**

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}}$$



- ▶ on étend cette définition aux images monochromes en construisant une **correspondance** entre \bigcap (resp. \bigcup) sur les images binaires et **min** (resp. **max**) sur les images

monochromes : principe de **superposition des coupes**

5.2. Principe de superposition des coupes

- ▶ expression d'une image monochrome comme une somme d'images binaires
- ▶ coupe (*cross section*) : analogie avec les images topographiques

- ▶ coupe CS_i : seuillage entre les « altitudes » i et i_{max}

$$CS_i = T_{[i, i_{max}]}$$

- ▶ on a :

$$CS_{i_{max}}(I) \subseteq CS_{i_{max}-1}(I) \subseteq \dots \subseteq$$



5.2. Principe de superposition des coupes

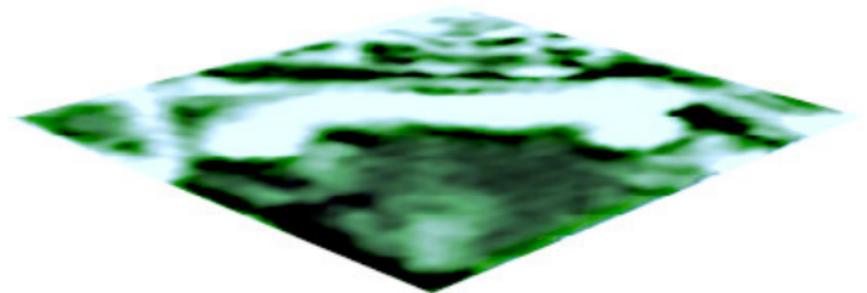
- ▶ expression d'une image monochrome comme une somme d'images binaires
- ▶ coupe (*cross section*) : analogie avec les images topographiques

- ▶ coupe CS_i : seuillage entre les « altitudes » i et i_{max}

$$CS_i = T_{[i, i_{max}]}$$

- ▶ on a :

$$CS_{i_{max}}(I) \subseteq CS_{i_{max}-1}(I) \subseteq \dots \subseteq$$



5.2. Principe de superposition des coupes

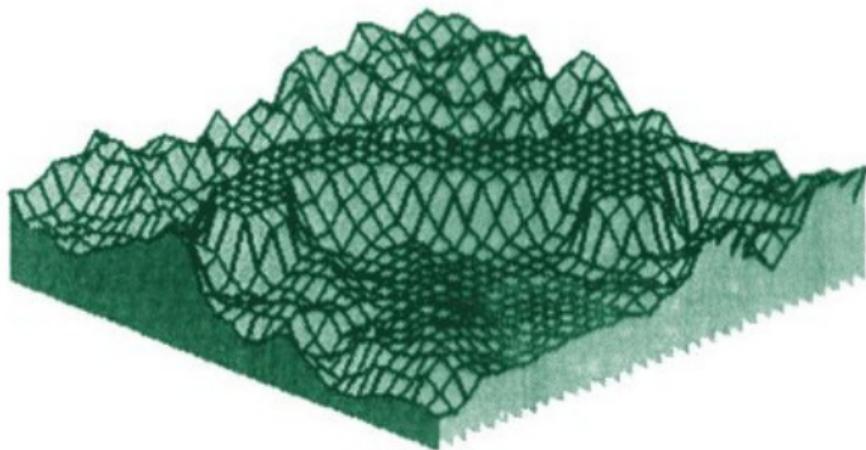
- ▶ expression d'une image monochrome comme une somme d'images binaires
- ▶ coupe (*cross section*) : analogie avec les images topographiques

- ▶ coupe CS_i : seuillage entre les « altitudes » i et i_{max}

$$CS_i = T_{[i, i_{max}]}$$

- ▶ on a :

$$CS_{i_{max}}(I) \subseteq CS_{i_{max}-1}(I) \subseteq \dots \subseteq$$



5.2. Principe de superposition des coupes

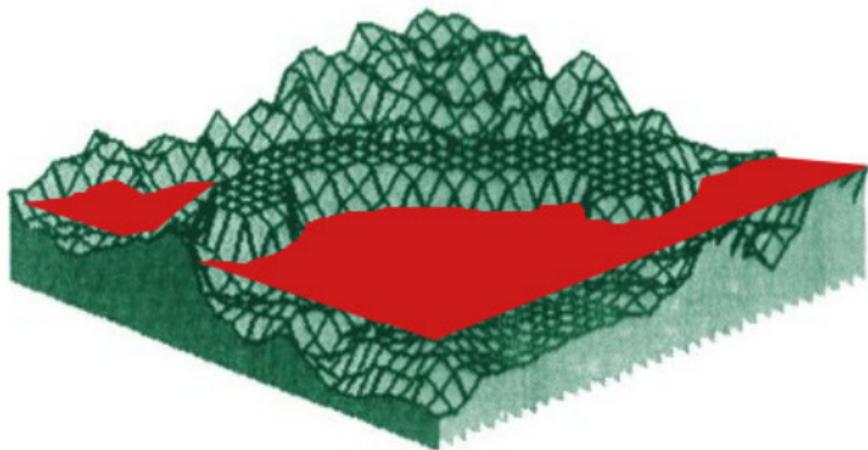
- ▶ expression d'une image monochrome comme une somme d'images binaires
- ▶ coupe (*cross section*) : analogie avec les images topographiques

- ▶ coupe CS_i : seuillage entre les « altitudes » i et i_{max}

$$CS_i = T_{[i, i_{max}]}$$

- ▶ on a :

$$CS_{i_{max}}(I) \subseteq CS_{i_{max}-1}(I) \subseteq \dots \subseteq$$



5.2. Principe de superposition des coupes

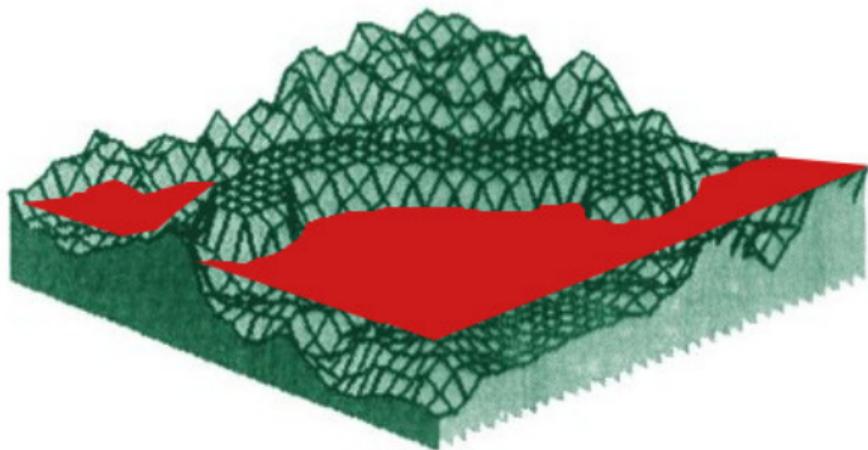
- ▶ expression d'une image monochrome comme une somme d'images binaires
- ▶ coupe (*cross section*) : analogie avec les images topographiques

- ▶ coupe CS_i : seuillage entre les « altitudes » i et i_{max}

$$CS_i = T_{[i, i_{max}]}$$

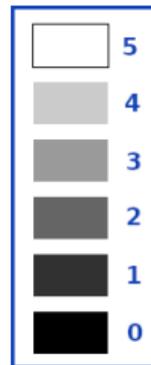
- ▶ on a :

$$CS_{i_{max}}(I) \subseteq CS_{i_{max}-1}(I) \subseteq \dots \subseteq$$





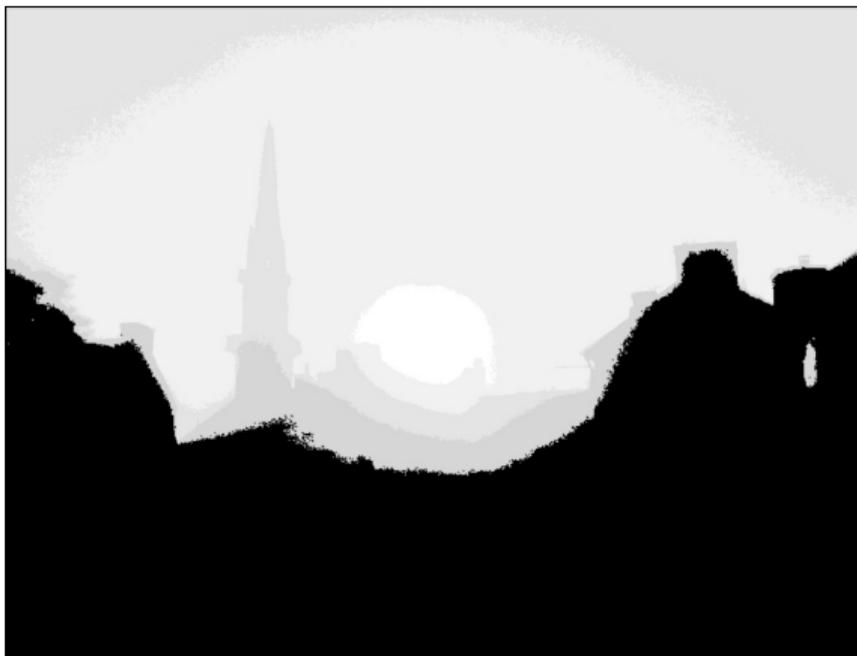
$$I : D \rightarrow [0..5]$$



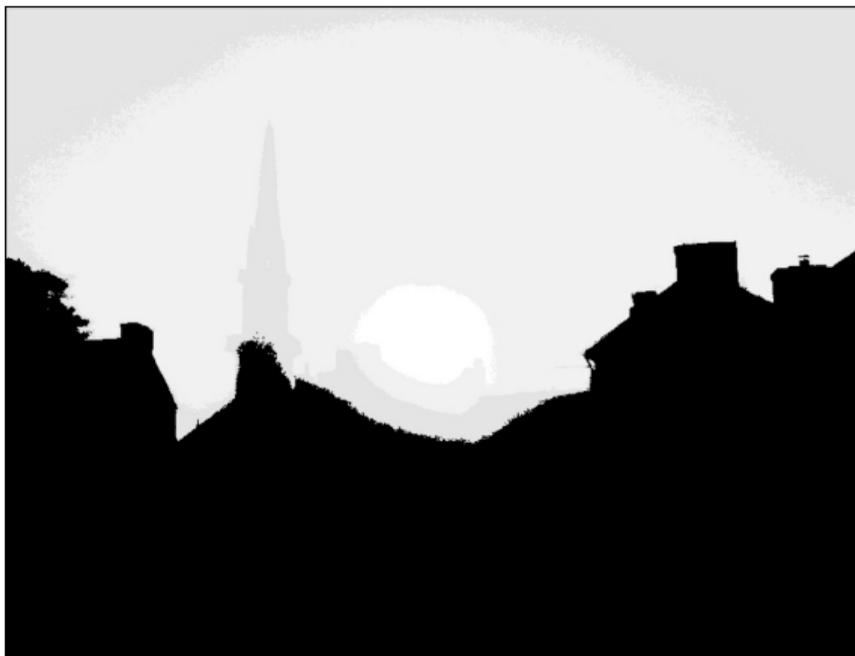
$$I : D \rightarrow [0..5]$$



coupe d'« altitude » 1 : $CS_1(I)$



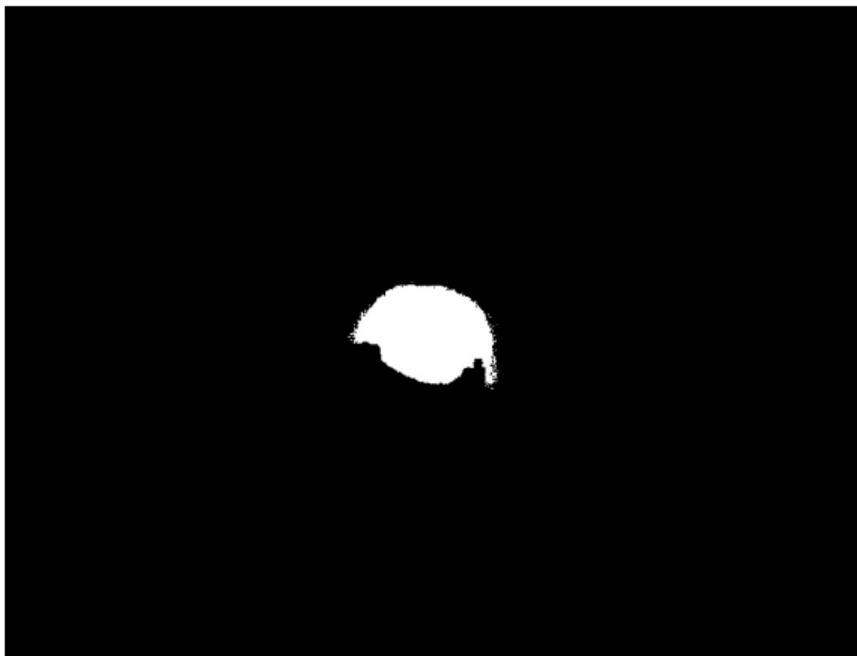
coupe d'« altitude » 2 : $CS_2(l)$



coupe d'« altitude » 3 : $CS_3(I)$



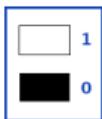
coupe d'« altitude » 4 : $CS_4(I)$



coupe d'« altitude » 5 : $CS_5(I)$

► une image monochrome est égale à la somme de ses coupes

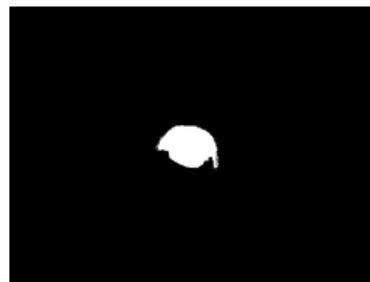
$$I(p) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \mathcal{C}_i(I)(p)$$



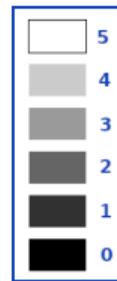
+



+

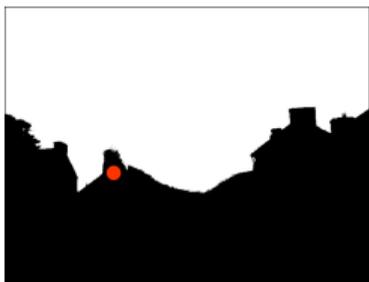
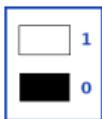


=



► une image monochrome est égale à la somme de ses coupes

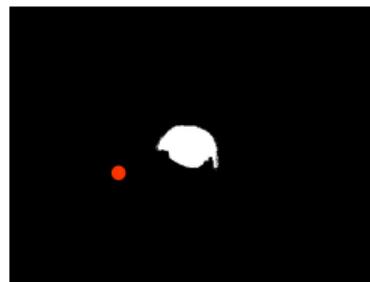
$$I(p) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \mathcal{C}_i(I)(p)$$



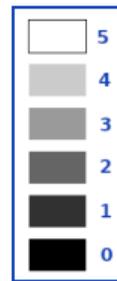
+



+

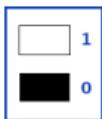


=



► une image monochrome est égale à la somme de ses coupes

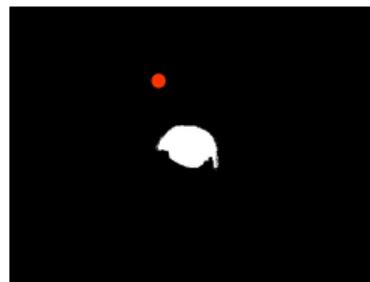
$$I(p) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \mathcal{C}_i(I)(p)$$



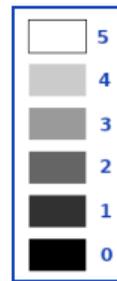
+



+



=



5.3. Généralisation des définitions des primitives morphologiques

<i>image N&B (ensembles)</i>	<i>images monochromes</i>
\cap	\wedge : minimum
\cup	\vee : maximum

- ▶ minimum et maximum de deux images : point par point

$$(I \wedge J)(p) = \min\{I(p), J(p)\}$$

$$(I \vee J)(p) = \max\{I(p), J(p)\}$$

- ▶ généralisation de l'érosion

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_X(I) = \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}}$$

- ▶ généralisation de la dilatation

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}} \quad \longrightarrow \quad \delta_X(I) = \bigvee_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}}$$

5.3. Généralisation des définitions des primitives morphologiques

<i>image N&B (ensembles)</i>	<i>images monochromes</i>
\cap	\wedge : minimum
\cup	\vee : maximum

- ▶ minimum et maximum de deux images : point par point

$$(I \wedge J)(p) = \min\{I(p), J(p)\}$$

$$(I \vee J)(p) = \max\{I(p), J(p)\}$$

- ▶ généralisation de l'érosion

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_X(I) = \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}}$$

- ▶ généralisation de la dilatation

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}} \quad \longrightarrow \quad \delta_X(I) = \bigvee_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}}$$

5.3. Généralisation des définitions des primitives morphologiques

<i>image N&B (ensembles)</i>	<i>images monochromes</i>
\cap	\wedge : minimum
\cup	\vee : maximum

- ▶ minimum et maximum de deux images : point par point

$$(I \wedge J)(p) = \min\{I(p), J(p)\}$$

$$(I \vee J)(p) = \max\{I(p), J(p)\}$$

- ▶ généralisation de l'érosion

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_X(I) = \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}}$$

- ▶ généralisation de la dilatation

$$\delta_X(E) = \bigcup_{\vec{x} \in X} E_{-\vec{x}} \quad \longrightarrow \quad \delta_X(I) = \bigvee_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}}$$

- ▶ cela revient à définir l'érosion (resp. dilatation) d'une image monochrome I comme la **somme des érosions** (resp. dilatations) **des coupes de I**

- ▶ on note I^p la coupe **$CS_p(I)$**

$$\varepsilon_X(I) = \varepsilon_X(I^1) + \varepsilon_X(I^2) + \dots + \varepsilon_X(I^k)$$

$$= \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

\cap / \min	0	1
0	0	0
1	0	1

car \cap et \min (resp. \cup et \max) ont les **mêmes table de vérité** sur $\{0, 1\}$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} \left(I_{\vec{x}}^1 + I_{\vec{x}}^2 + \dots + I_{\vec{x}}^k \right)$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}$$

- ▶ cela revient à définir l'érosion (resp. dilatation) d'une image monochrome I comme la **somme des érosions** (resp. dilatations) **des coupes de I**

- ▶ on note I^p la coupe $\mathbf{CS}_p(I)$

$$\varepsilon_X(I) = \varepsilon_X(I^1) + \varepsilon_X(I^2) + \dots + \varepsilon_X(I^k)$$

$$= \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

\cap / \min	0	1
0	0	0
1	0	1

car \cap et \min (resp. \cup et \max) ont les **mêmes table de vérité** sur $\{0, 1\}$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} \left(I_{\vec{x}}^1 + I_{\vec{x}}^2 + \dots + I_{\vec{x}}^k \right)$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}$$

- ▶ cela revient à définir l'érosion (resp. dilatation) d'une image monochrome I comme la **somme des érosions** (resp. dilatations) **des coupes de I**

- ▶ on note I^p la coupe $\mathbf{CS}_p(I)$

$$\varepsilon_X(I) = \varepsilon_X(I^1) + \varepsilon_X(I^2) + \dots + \varepsilon_X(I^k)$$

$$= \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

\cap / \min	0	1
0	0	0
1	0	1

car \cap et \min (resp. \cup et \max) ont les **mêmes table de vérité** sur $\{0, 1\}$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} \left(I_{\vec{x}}^1 + I_{\vec{x}}^2 + \dots + I_{\vec{x}}^k \right)$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}$$

- ▶ cela revient à définir l'érosion (resp. dilatation) d'une image monochrome I comme la **somme des érosions** (resp. dilatations) **des coupes de I**

- ▶ on note I^p la coupe $\mathbf{CS}_p(I)$

$$\varepsilon_X(I) = \varepsilon_X(I^1) + \varepsilon_X(I^2) + \dots + \varepsilon_X(I^k)$$

$$= \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

\cap / \min	0	1
0	0	0
1	0	1

car \cap et \min (resp. \cup et \max) ont les **mêmes table de vérité** sur $\{0, 1\}$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} \left(I_{\vec{x}}^1 + I_{\vec{x}}^2 + \dots + I_{\vec{x}}^k \right)$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}$$

- ▶ cela revient à définir l'érosion (resp. dilatation) d'une image monochrome I comme la **somme des érosions** (resp. dilatations) **des coupes de I**

- ▶ on note I^p la coupe $\mathbf{CS}_p(I)$

$$\varepsilon_X(I) = \varepsilon_X(I^1) + \varepsilon_X(I^2) + \dots + \varepsilon_X(I^k)$$

$$= \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigcap_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^1 + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^2 + \dots + \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}^k$$

\cap / \min	0	1
0	0	0
1	0	1

car \cap et \min (resp. \cup et \max) ont les **mêmes table de vérité** sur $\{0, 1\}$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} \left(I_{\vec{x}}^1 + I_{\vec{x}}^2 + \dots + I_{\vec{x}}^k \right)$$

$$= \bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{\vec{x}}$$

5.4. Calcul des primitives monochrome

- mise en œuvre de l'érosion d'image monochrome : expression en un point p

$$\begin{aligned}\varepsilon_X(I)(p) &= \left(\bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}} \right)(p) \\ &= \min_{\vec{x} \in X} (I_{-\vec{x}}(p)) \\ &= \min_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x})\end{aligned}$$

→ c'est le minimum de tous les points couverts par l'élément structurant

- mise en œuvre de la dilatation d'image monochrome

$$\delta_X(I)(p) = \max_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x})$$

→ c'est le maximum de tous les points couverts par l'élément structurant

5.4. Calcul des primitives monochrome

- mise en œuvre de l'érosion d'image monochrome : expression en un point p

$$\begin{aligned}\varepsilon_X(I)(p) &= \left(\bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}} \right)(p) \\ &= \min_{\vec{x} \in X} (I_{-\vec{x}}(p)) \\ &= \min_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x})\end{aligned}$$

→ c'est le **minimum** de tous les points couverts par l'élément structurant

- mise en œuvre de la dilatation d'image monochrome

$$\delta_X(I)(p) = \max_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x})$$

→ c'est le **maximum** de tous les points couverts par l'élément structurant

5.4. Calcul des primitives monochrome

- mise en œuvre de l'érosion d'image monochrome : expression en un point p

$$\begin{aligned}\varepsilon_X(I)(p) &= \left(\bigwedge_{\vec{x} \in X} I_{-\vec{x}} \right)(p) \\ &= \min_{\vec{x} \in X} (I_{-\vec{x}}(p)) \\ &= \min_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x})\end{aligned}$$

→ c'est le **minimum** de tous les points couverts par l'élément structurant

- mise en œuvre de la dilatation d'image monochrome

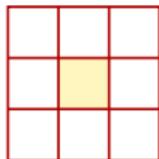
$$\delta_X(I)(p) = \max_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x})$$

→ c'est le **maximum** de tous les points couverts par l'élément structurant

○ Exemple avec un ES carré de demi largeur 1

▶ $\varepsilon_X(I)(p) = \min_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow$

▶ $\delta_X(I)(p) = \max_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow$



9	4	7	8	9	5	3	1	4
9	4	1	5	7	4	1	9	8
2	1	1	2	4	2	8	7	8
5	2	5	8	5	2	5	3	7
7	8	3	4	3	9	2	3	4
2	9	1	8	9	1	1	2	8
5	8	8	8	4	3	1	7	9

○ Exemple avec un ES carré de demi largeur 1

▶ $\varepsilon_X(I)(p) = \min_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow ?$

▶ $\delta_X(I)(p) = \max_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow$

9	4	7	8	9	5	3	1	4
9	4	1	5	7	4	1	9	8
2	1	1	2	4	2	8	7	8
5	2	5	8	5	2	5	3	7
7	8	3	4	3	9	2	3	4
2	9	1	8	9	1	1	2	8
5	8	8	8	4	3	1	7	9

○ Exemple avec un ES carré de demi largeur 1

▶ $\varepsilon_X(I)(p) = \min_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow 1$

▶ $\delta_X(I)(p) = \max_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow$

9	4	7	8	9	5	3	1	4
9	4	1	5	7	4	1	9	8
2	1	1	2	4	2	8	7	8
5	2	5	8	5	2	5	3	7
7	8	3	4	3	9	2	3	4
2	9	1	8	9	1	1	2	8
5	8	8	8	4	3	1	7	9

○ Exemple avec un ES carré de demi largeur 1

▶ $\varepsilon_X(l)(p) = \min_{\vec{x} \in X} l(p + \vec{x}) \rightarrow 1$

▶ $\delta_X(l)(p) = \max_{\vec{x} \in X} l(p + \vec{x}) \rightarrow ?$

9	4	7	8	9	5	3	1	4
9	4	1	5	7	4	1	9	8
2	1	1	2	4	2	8	7	8
5	2	5	8	5	2	5	3	7
7	8	3	4	3	9	2	3	4
2	9	1	8	9	1	1	2	8
5	8	8	8	4	3	1	7	9

○ Exemple avec un ES carré de demi largeur 1

▶ $\varepsilon_X(I)(p) = \min_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow 1$

▶ $\delta_X(I)(p) = \max_{\vec{x} \in X} I(p + \vec{x}) \rightarrow 8$

9	4	7	8	9	5	3	1	4
9	4	1	5	7	4	1	9	8
2	1	1	2	4	2	8	7	8
5	2	5	8	5	2	5	3	7
7	8	3	4	3	9	2	3	4
2	9	1	8	9	1	1	2	8
5	8	8	8	4	3	1	7	9

★ Opération morphologique sur une image monochrome



1



2



3



4



	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ

★ Opération morphologique sur une image monochrome



	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ



★ Opération morphologique sur une image monochrome



1



	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ

★ Opération morphologique sur une image monochrome



	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ



★ Opération morphologique sur une image monochrome



2



	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ

★ Opération morphologique sur une image monochrome



	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ



★ Opération morphologique sur une image monochrome



	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ

3



★ Opération morphologique sur une image monochrome



	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ



★ Opération morphologique sur une image monochrome



4

	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ



★ Opération morphologique sur une image monochrome



1



2



3



4



	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ

★ Opération morphologique sur une image monochrome



1



2



3

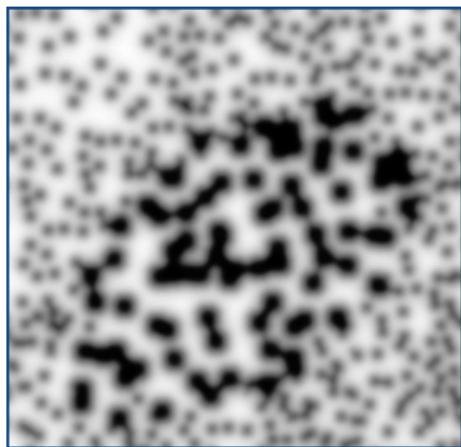


4

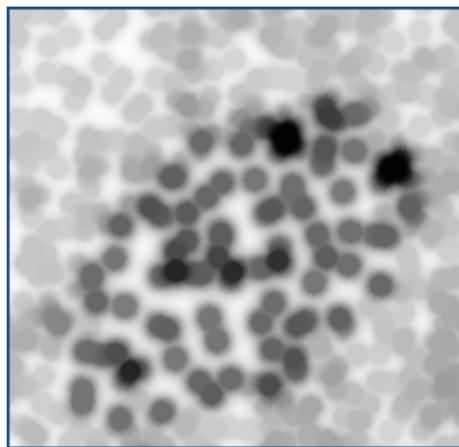


	1	2	3	4
A	γ	δ	ϵ	φ
B	φ	γ	δ	ϵ
C	δ	ϵ	φ	γ
D	φ	ϵ	δ	γ

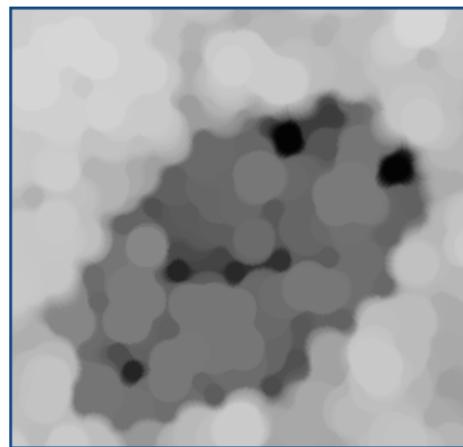
- Exemple d'extraction d'un objet diffus dans une image monochrome



I_4

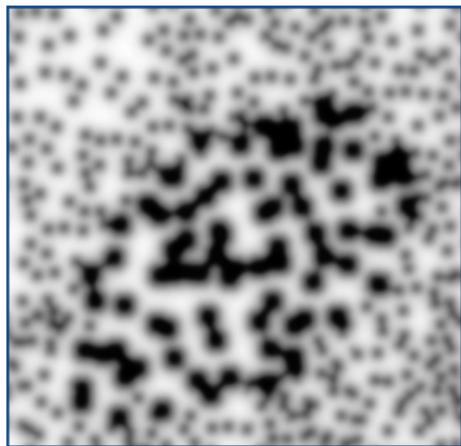


$\varphi(I_4)$

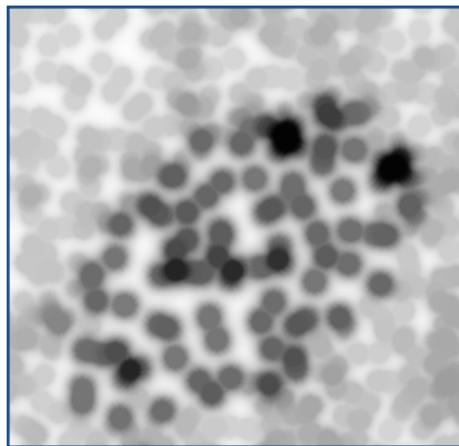


$\gamma(\varphi(I_4))$

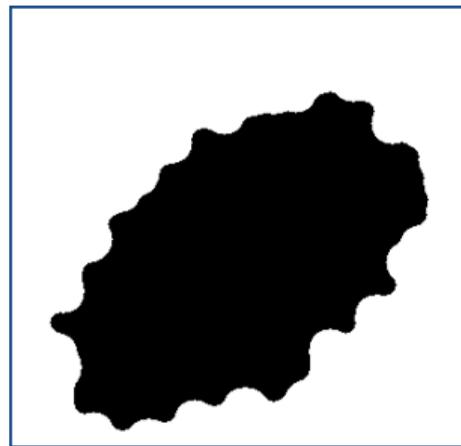
- Exemple d'extraction d'un objet diffus dans une image monochrome



I_4

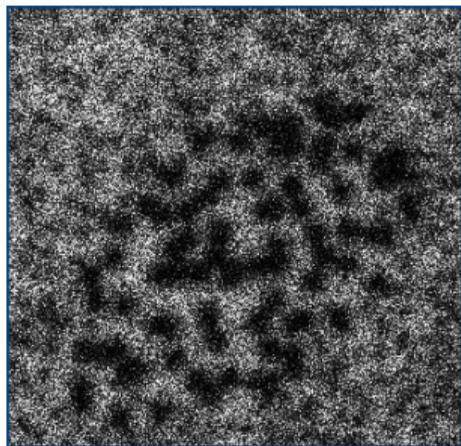


$\varphi(I_4)$

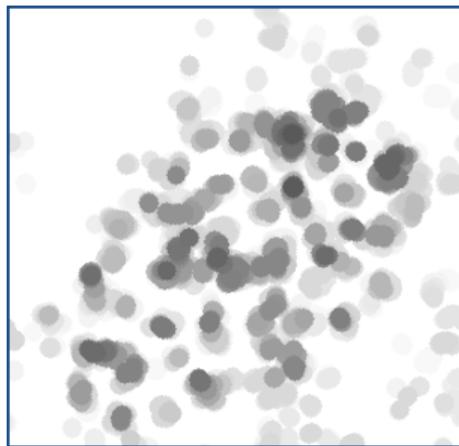


seuillage de $\gamma(\varphi(I_4))$

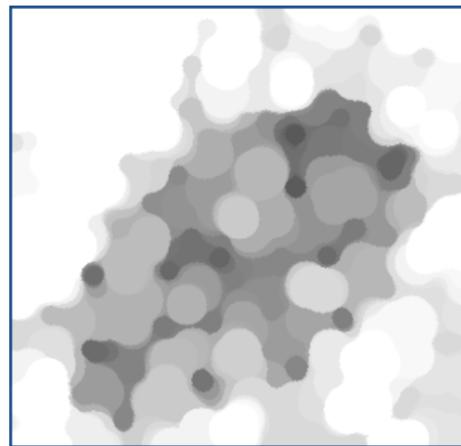
- Exemple d'extraction d'un objet diffus dans une image monochrome bruitée



I_5

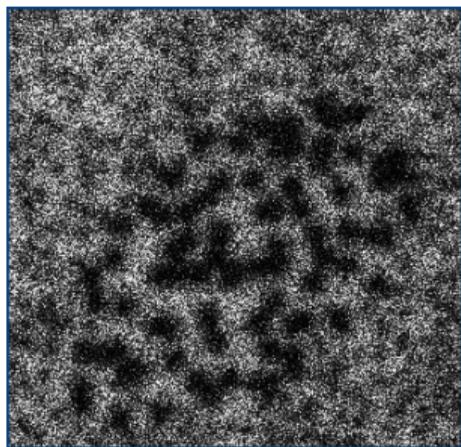


$\varphi(I_5)$

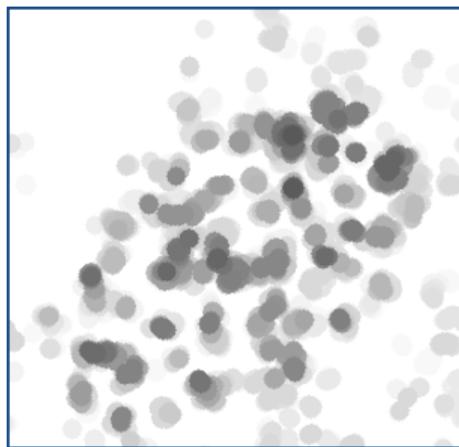


$\gamma(\varphi(I_5))$

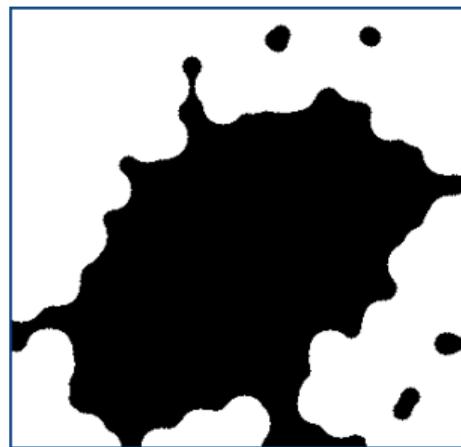
- Exemple d'extraction d'un objet diffus dans une image monochrome bruitée



I_5



$\varphi(I_5)$



seuillage de $\gamma(\varphi(I_5))$

6. Quelques propriétés des primitives morphologiques

6.1. Primitives ensemblistes (images binaires)

- ▶ **idempotence** de l'ouverture et de la fermeture :

$$\gamma\gamma = \gamma \quad \text{et} \quad \varphi\varphi = \varphi$$

- ▶ **dualité** :

$$\begin{cases} \delta_X = \mathbb{C}\varepsilon_X\mathbb{C} \\ \varepsilon_X = \mathbb{C}\delta_X\mathbb{C} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_X = \mathbb{C}\varphi_X\mathbb{C} \\ \varphi_X = \mathbb{C}\gamma_X\mathbb{C} \end{cases}$$

érosion/ouverture des parties noires (resp. blanches)



dilatation/fermeture des parties noires (resp. blanches)

- ▶ **extensivité** / **anti-extensivité** de l'érosion et de la dilatation :

$$\begin{cases} \varepsilon_X(E) \subset E \\ E \subset \delta_X(E) \end{cases}$$

6. Quelques propriétés des primitives morphologiques

6.1. Primitives ensemblistes (images binaires)

- ▶ **idempotence** de l'ouverture et de la fermeture :

$$\gamma\gamma = \gamma \quad \text{et} \quad \varphi\varphi = \varphi$$

- ▶ **dualité** :

$$\begin{cases} \delta_X = \mathbb{C}\varepsilon_X\mathbb{C} \\ \varepsilon_X = \mathbb{C}\delta_X\mathbb{C} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_X = \mathbb{C}\varphi_X\mathbb{C} \\ \varphi_X = \mathbb{C}\gamma_X\mathbb{C} \end{cases}$$

érosion/ouverture des parties noires (resp. blanches)



dilatation/fermeture des parties noires (resp. blanches)

- ▶ **extensivité / anti-extensivité** de l'érosion et de la dilatation :

$$\begin{cases} \varepsilon_X(E) \subset E \\ E \subset \delta_X(E) \end{cases}$$

6. Quelques propriétés des primitives morphologiques

6.1. Primitives ensemblistes (images binaires)

- ▶ **idempotence** de l'ouverture et de la fermeture :

$$\gamma\gamma = \gamma \quad \text{et} \quad \varphi\varphi = \varphi$$

- ▶ **dualité** :

$$\begin{cases} \delta_X = \mathbb{C}\varepsilon_X\mathbb{C} \\ \varepsilon_X = \mathbb{C}\delta_X\mathbb{C} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_X = \mathbb{C}\varphi_X\mathbb{C} \\ \varphi_X = \mathbb{C}\gamma_X\mathbb{C} \end{cases}$$

érosion/ouverture des parties noires (resp. blanches)



dilatation/fermeture des parties noires (resp. blanches)

- ▶ **extensivité** / **anti-extensivité** de l'érosion et de la dilatation :

$$\begin{cases} \varepsilon_X(E) \subset E \\ E \subset \delta_X(E) \end{cases}$$

6.2. Préservation des propriétés pour les images monochromes

- ▶ idempotence de l'ouverture et de la fermeture
- ▶ dualité

$$\delta_X = \mathbb{C}\varepsilon_X\mathbb{C}$$

$$\gamma_X = \mathbb{C}\varphi_X\mathbb{C}$$



/

6.2. Préservation des propriétés pour les images monochromes

- ▶ idempotence de l'ouverture et de la fermeture
- ▶ dualité

$$\delta_X = \mathbb{C}\varepsilon_X\mathbb{C}$$

$$\gamma_X = \mathbb{C}\varphi_X\mathbb{C}$$



$\mathbb{C}(I)$

6.2. Préservation des propriétés pour les images monochromes

- ▶ idempotence de l'ouverture et de la fermeture
- ▶ dualité

$$\delta_X = \mathbb{C} \varepsilon_X \mathbb{C}$$

$$\gamma_X = \mathbb{C} \varphi_X \mathbb{C}$$



$$\varepsilon_X(\mathbb{C}(I))$$

6.2. Préservation des propriétés pour les images monochromes

- ▶ idempotence de l'ouverture et de la fermeture
- ▶ dualité

$$\delta_X = \mathbb{C}\varepsilon_X\mathbb{C}$$

$$\gamma_X = \mathbb{C}\varphi_X\mathbb{C}$$



$$\mathbb{C}(\varepsilon_X(\mathbb{C}(I))) = \delta(I)$$

6.2. Préservation des propriétés pour les images monochromes

- ▶ idempotence de l'ouverture et de la fermeture
- ▶ dualité

$$\delta_X = \mathbb{C}\varepsilon_X\mathbb{C}$$

$$\gamma_X = \mathbb{C}\varphi_X\mathbb{C}$$



$$\mathbb{C}(\varepsilon_X(\mathbb{C}(I))) = \delta(I)$$

► extensivité / anti-extensivité

$$\begin{cases} \varepsilon_X(I)(p) \leq I(p) \\ I(p) \leq \delta_X(I)(p) \end{cases}$$

- et donc : $I - \varepsilon(I)$, $\delta(I) - I$ et $\delta(I) - \varepsilon(I)$ sont à valeur dans $\in [0..I_{max}]$
- gradients de Beucher (interne, externe et standard) :



$I - \varepsilon(I)$



$\delta(I) - I$



$\delta(I) - \varepsilon(I)$

7. Extension aux images RGB

- ▶ mise en œuvre marginale



/

7. Extension aux images RGB

- ▶ mise en œuvre marginale



?

7. Extension aux images RGB

- mise en œuvre marginale



$\delta(I)$

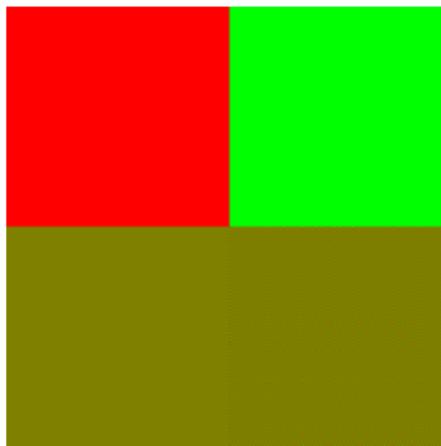
7. Extension aux images RGB

- ▶ mise en œuvre marginale



$\varepsilon(I)$

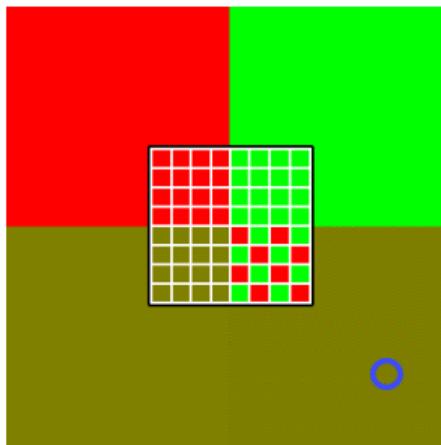
- ▶ alternative entre traitement marginal et vectoriel (ordre entrelacé)
- ▶ pas de solution idéale (pas de bonne relation d'ordre sur les couleurs)



▶ marginal :

$$\min \left\{ \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

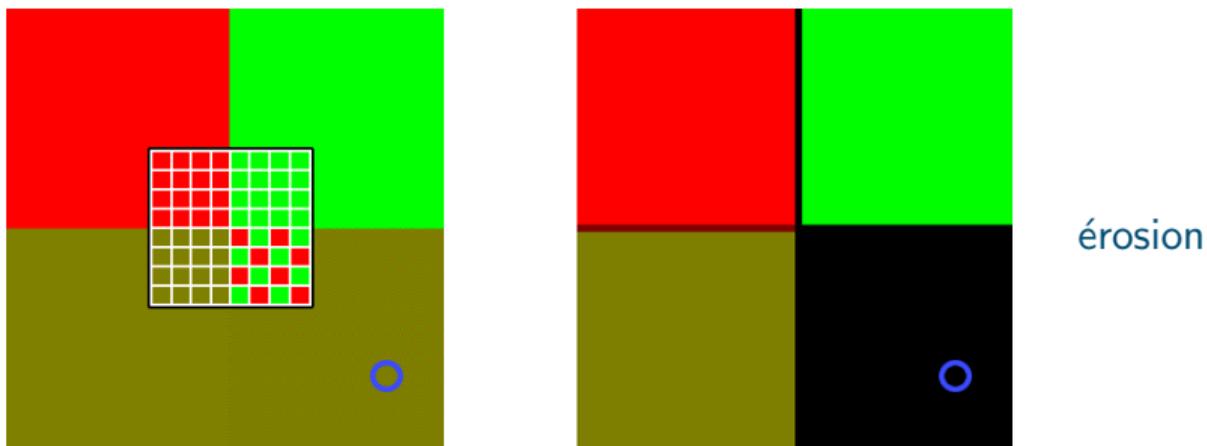
- ▶ alternative entre traitement marginal et vectoriel (ordre entrelacé)
- ▶ pas de solution idéale (pas de bonne relation d'ordre sur les couleurs)



▶ marginal :

$$\min \left\{ \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

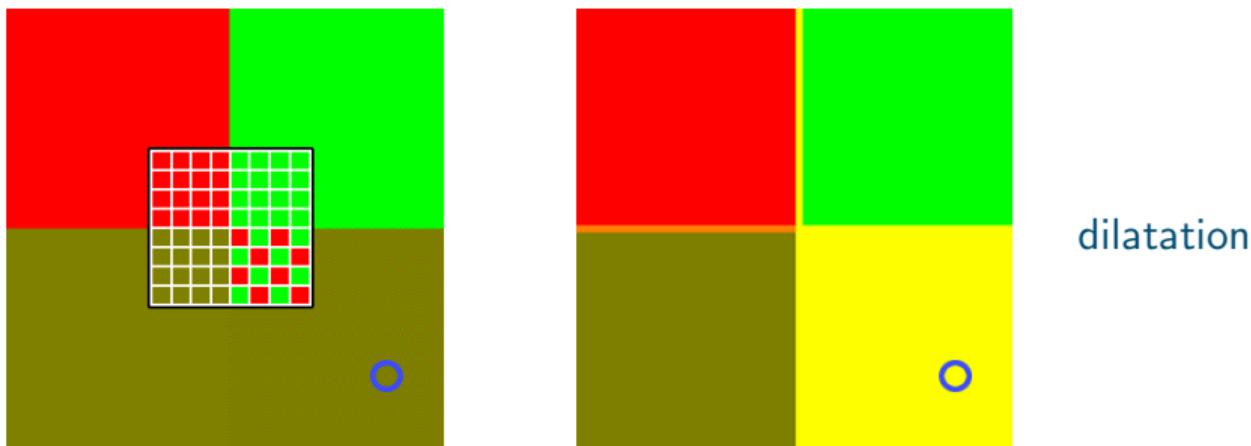
- ▶ alternative entre traitement marginal et vectoriel (ordre entrelacé)
- ▶ pas de solution idéale (pas de bonne relation d'ordre sur les couleurs)



- ▶ marginal :

$$\min \left\{ \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

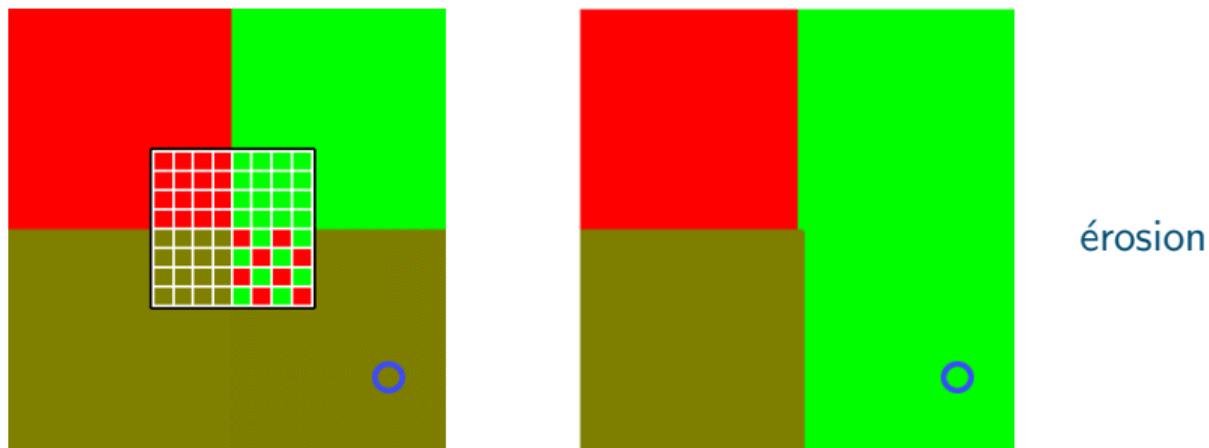
- ▶ alternative entre traitement marginal et vectoriel (ordre entrelacé)
- ▶ pas de solution idéale (pas de bonne relation d'ordre sur les couleurs)



- ▶ marginal :

$$\max \left\{ \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 255 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ alternative entre traitement marginal et vectoriel (ordre entrelacé)
- ▶ pas de solution idéale (pas de bonne relation d'ordre sur les couleurs)



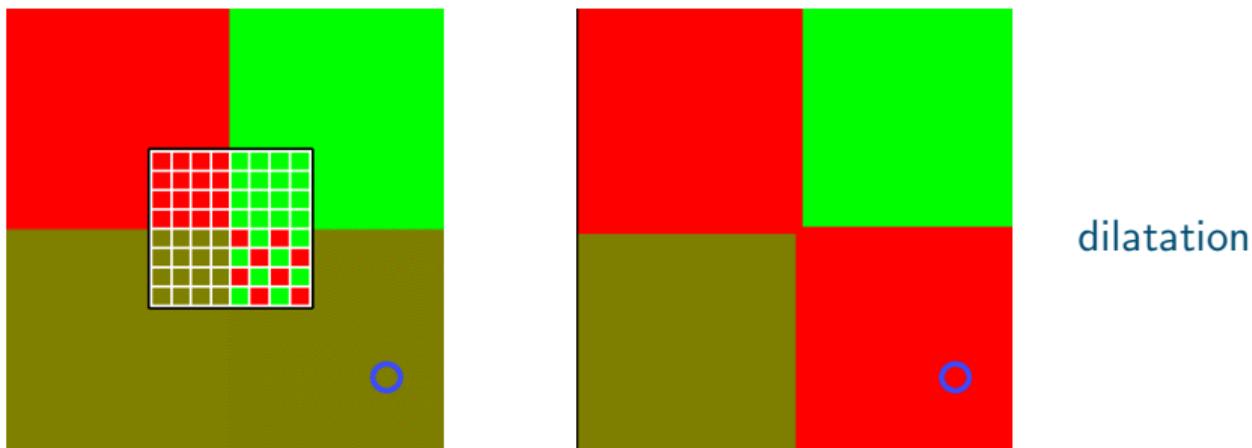
- ▶ vectoriel :

$R = 100100100100100100100100$

$G = 010010010010010010010010$

$$\min \begin{cases} 100100100100100100100100 \\ 010010010010010010010010 \end{cases} = 010010010010010010010010$$

- ▶ alternative entre traitement marginal et vectoriel (ordre entrelacé)
- ▶ pas de solution idéale (pas de bonne relation d'ordre sur les couleurs)



- ▶ vectoriel :

$R = 100100100100100100100100$

$G = 010010010010010010010010$

$$\max \begin{cases} 100100100100100100100100 \\ 010010010010010010010010 \end{cases} = 100100100100100100100100$$