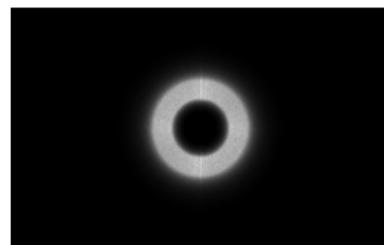


transformation globale

Partie B — thème 2

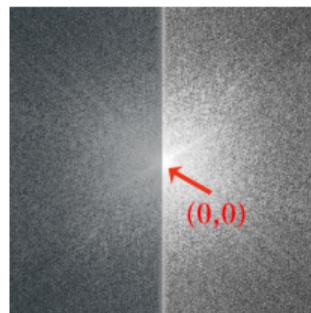
Filtrage fréquentiel

- changement de représentation (espace de fréquences)
- projection sur une base de fonction (Fourier, DCT, ondelettes, etc)
- filtrage fréquentiel dans le spectre d'amplitude de Fourier

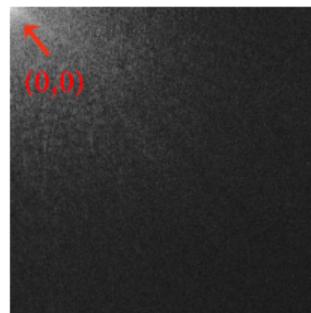


1. Principales représentations fréquentielles utilisées en TI

- ▶ transformée de **Fourier** discrète : projection sur des exponentielles complexes
 - ▶ *spectre d'amplitude adapté au filtrage*
- ▶ transformée **en cosinus** discrète (DCT)
 - ▶ *projection sur des cosinus : résultat à coefficients réels, pas de redondance*
 - ▶ *propriété de regroupement de l'énergie*
 - ▶ *compression (JPEG/MPEG) : on conserve les coefficients de plus basses fréquences*
- ▶ transformée **en ondelettes**
 - ▶ *projection sur une base de fonctions obtenue par translation et dilatation d'une fonction de base (ondelette mère)*
 - ▶ *permet une représentation multirésolution*
 - ▶ *nombreuses applications : compression (JPEG/MPEG 2000), débruitage, flou/détail, analyse fractale...*



FFT

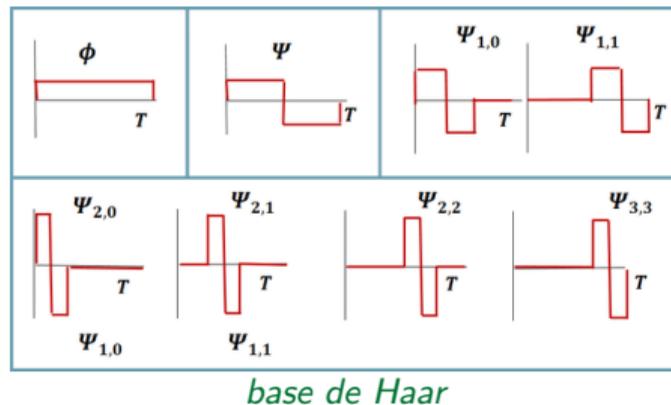
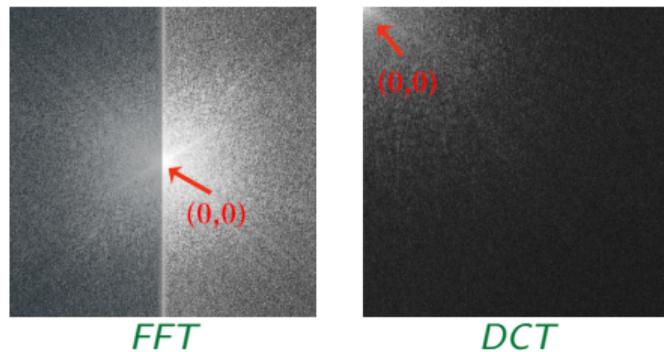


DCT

base de Haar

1. Principales représentations fréquentielles utilisées en TI

- ▶ transformée de **Fourier** discrète : projection sur des exponentielles complexes
 - ▶ spectre d'amplitude adapté au filtrage
- ▶ transformée **en cosinus** discrète (DCT)
 - ▶ projection sur des cosinus : résultat à coefficients réels, pas de redondance
 - ▶ propriété de regroupement de l'énergie
 - ▶ compression (JPEG/MPEG) : on conserve les coefficients de plus basses fréquences
- ▶ transformée **en ondelettes**
 - ▶ projection sur une base de fonctions obtenue par translation et dilatation d'une fonction de base (ondelette mère)
 - ▶ permet une représentation multirésolution
 - ▶ nombreuses applications : compression (JPEG/MPEG 2000), débruitage, flou/détail, analyse fractale...



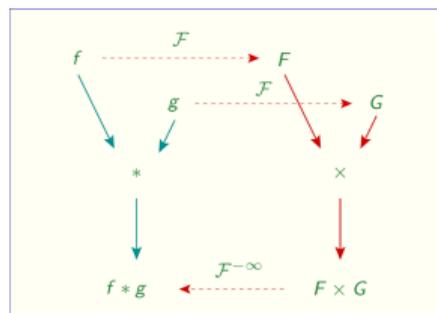
2. Principe du filtrage fréquentiel

2.1. Correspondance filtrage spatial et fréquentiel

- ▶ (rappel) théorème de convolution

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$$

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g))$$



- ▶ convolution \longleftrightarrow produit : dualité réponse impulsionnelle / fonction de transfert

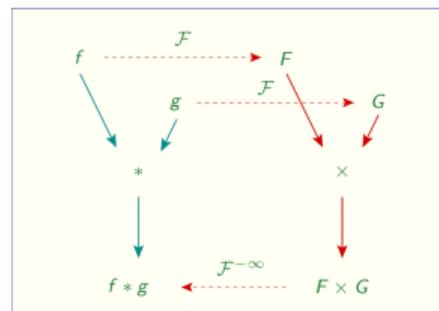
2. Principe du filtrage fréquentiel

2.1. Correspondance filtrage spatial et fréquentiel

- (rappel) théorème de convolution

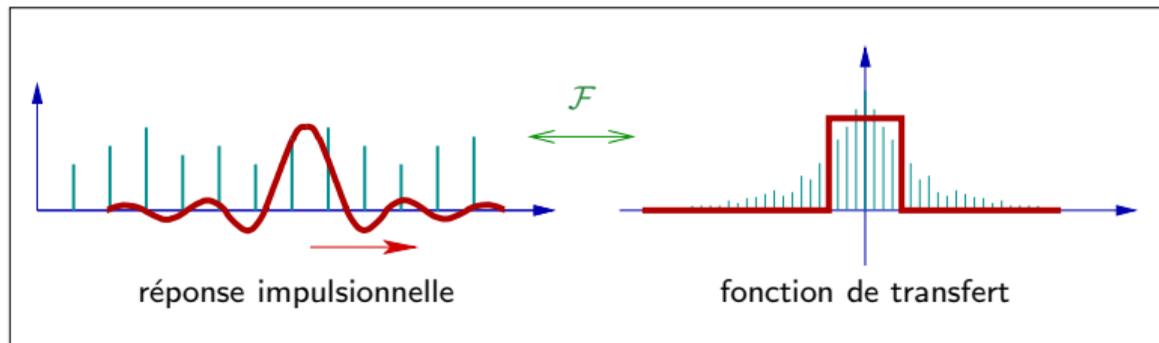
$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$$

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g))$$



- convolution \longleftrightarrow produit : dualité réponse impulsionnelle / fonction de transfert

sinc / box



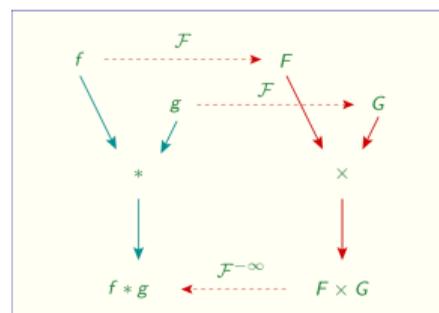
2. Principe du filtrage fréquentiel

2.1. Correspondance filtrage spatial et fréquentiel

- (rappel) théorème de convolution

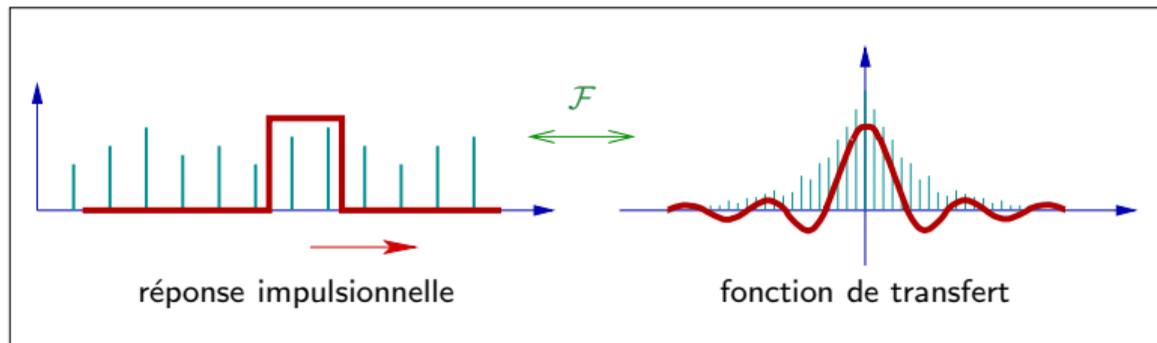
$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$$

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g))$$



- convolution \longleftrightarrow produit : dualité réponse impulsionnelle / fonction de transfert

sinc / box



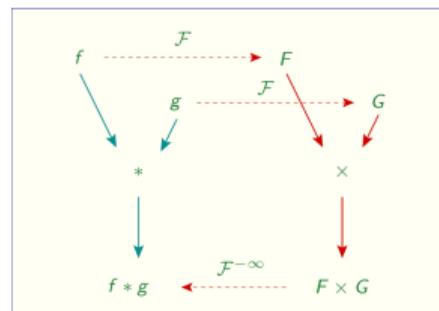
2. Principe du filtrage fréquentiel

2.1. Correspondance filtrage spatial et fréquentiel

- (rappel) théorème de convolution

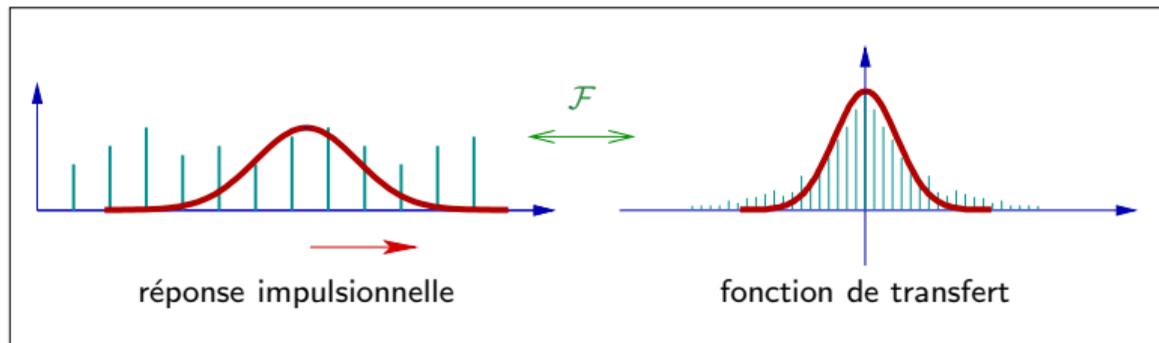
$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$$

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g))$$



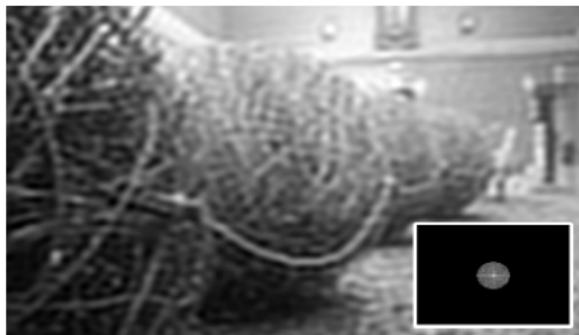
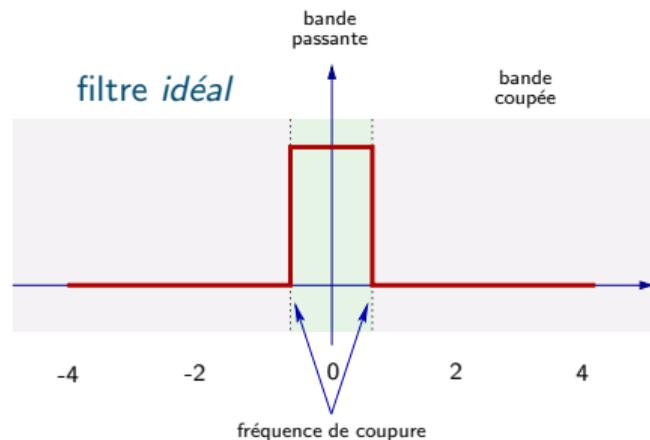
- convolution \longleftrightarrow produit : dualité réponse impulsionnelle / fonction de transfert

gaussienne



2.2. Caractéristiques d'un filtre fréquentiel

▶ bande passante



idéal

▶ filtre théorique idéal

▶ *filtres boîte (définis sur $\{0, 1\}$)*

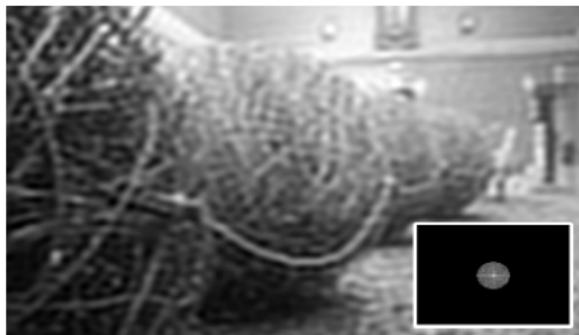
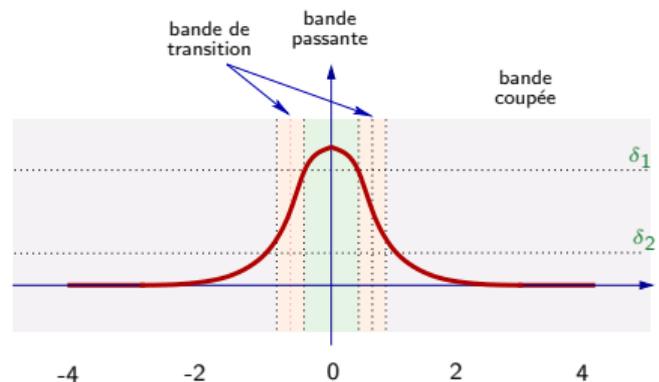
▶ *contrôle précis de la fréquence de coupure vs échos (accentuation des contours) (coefficients négatifs du filtre sinc non compensés sur une fenêtre de taille finie)*

▶ *filtre gaussien : suppression de l'écho mais moins précis*

→ objectif : trouver un compromis idéal / gaussien (transition progressive)

2.2. Caractéristiques d'un filtre fréquentiel

▶ bande passante



idéal



gaussien

▶ filtre théorique idéal

▶ *filtres boîte (définis sur $\{0, 1\}$)*

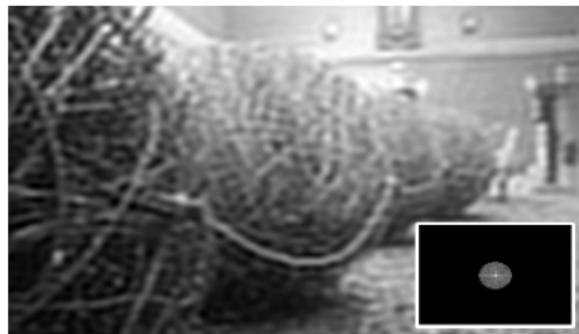
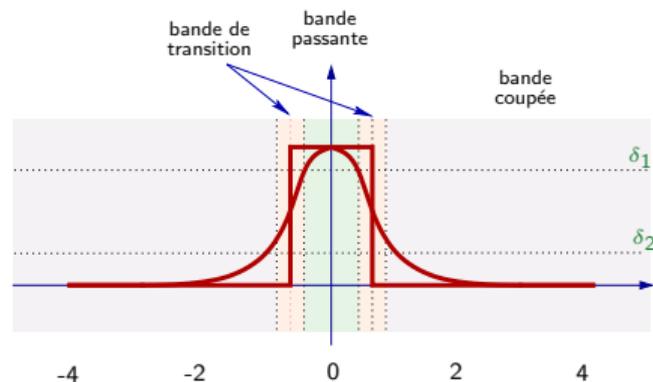
▶ *contrôle précis de la fréquence de coupure vs échos (accentuation des contours) (coefficients négatifs du filtre sinc non compensés sur une fenêtre de taille finie)*

▶ filtre gaussien : suppression de l'écho mais moins précis

→ objectif : trouver un compromis idéal / gaussien (transition progressive)

2.2. Caractéristiques d'un filtre fréquentiel

► bande passante



idéal



gaussien

► filtre théorique idéal

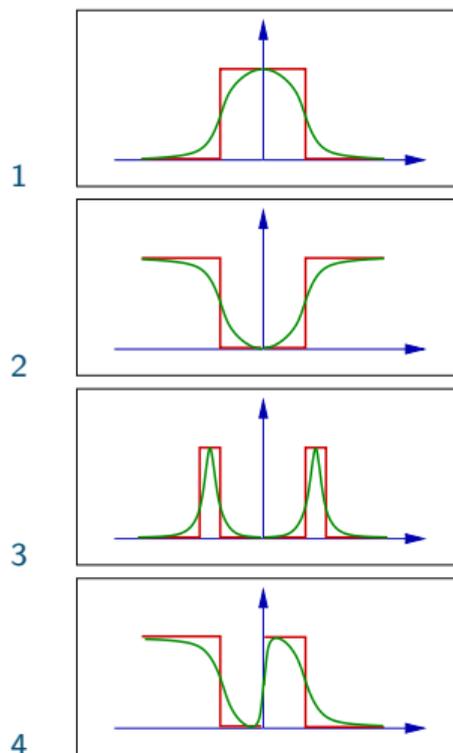
► *filtres boîte (définis sur $\{0, 1\}$)*

► *contrôle précis de la fréquence de coupure vs échos (accentuation des contours) (coefficients négatifs du filtre sinc non compensés sur une fenêtre de taille finie)*

► filtre gaussien : suppression de l'écho mais moins précis

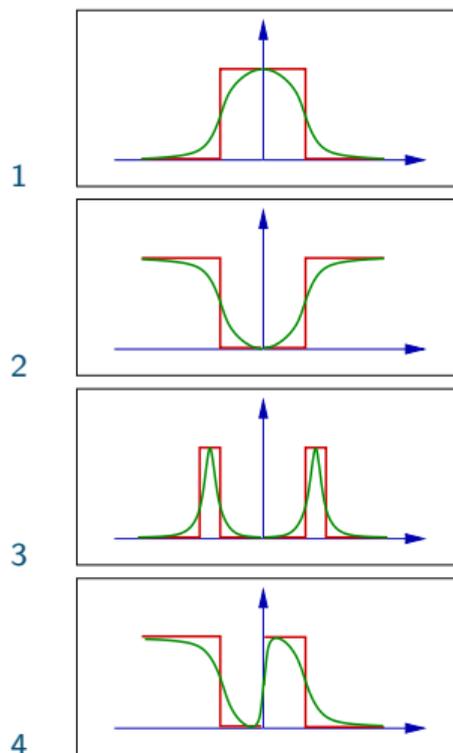
→ objectif : trouver un compromis idéal / gaussien (transition progressive)

★ Types de filtres fréquentiels



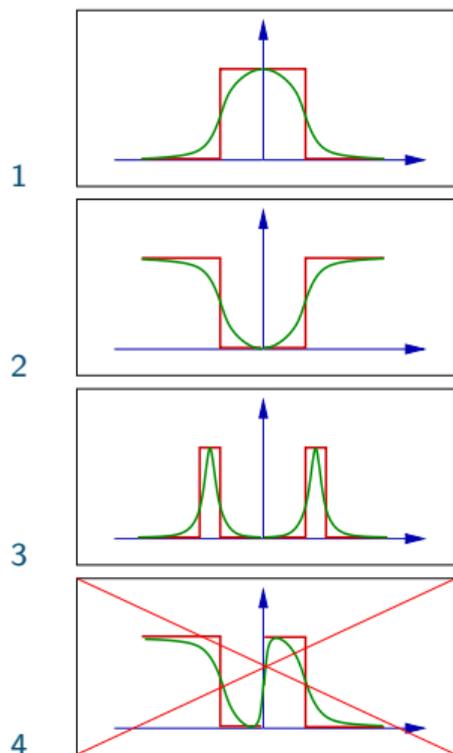
	A	B	C	D
passe-bas	1	2	2	1
passe-haut	2	1	1	2
passe-bas / passe-haut			4	
passe-haut / passe-bas	4			
passe-bande				3
rejet de bande		3		

★ Types de filtres fréquentiels



	A	B	C	D
1	1	2	2	1
2	2	1	1	2
3			4	
4	4			
5				3
6		3		

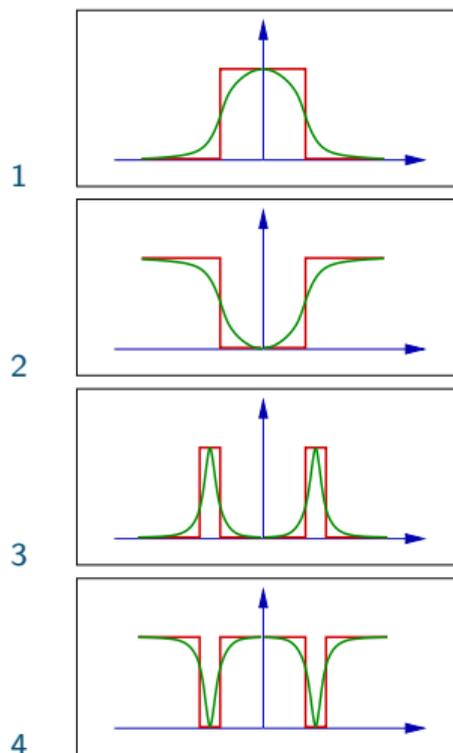
★ Types de filtres fréquentiels



	A	B	C	D
1	1	2	2	1
2	2	1	1	2
3			4	
4	4			
5				3
6		3		

symétrie du spectre de Fourier d'une image

★ Types de filtres fréquentiels



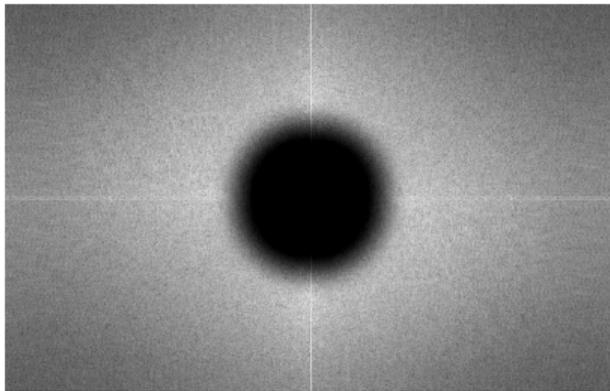
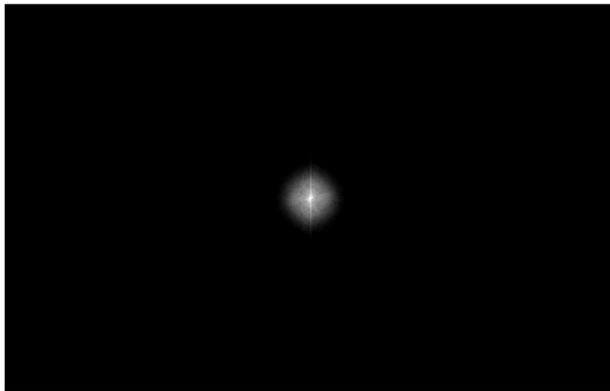
	A	B	C	D
1	1	2	2	1
2	2	1	1	2
3			4	
4	4			
5				3
6		3		4

symétrie du spectre de Fourier d'une image

2.3. Analogie des filtres 1D en dimension deux

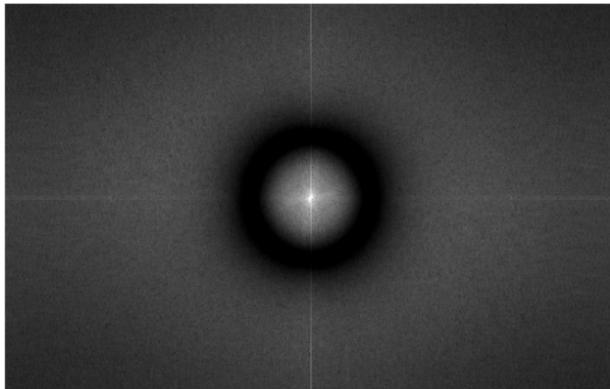
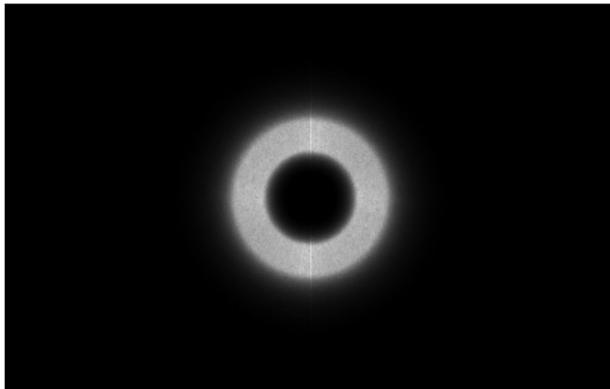
- Filtres isotropes par rapport à la fréquence nulle

?



?

?

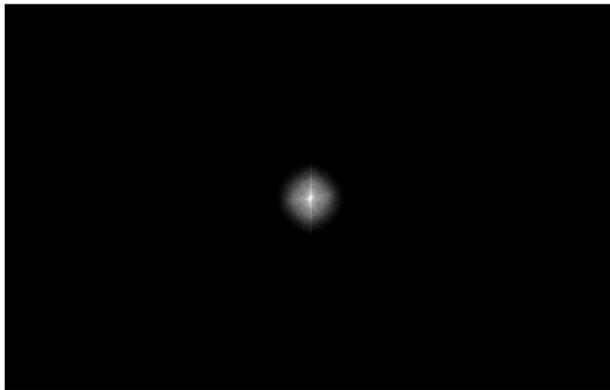


?

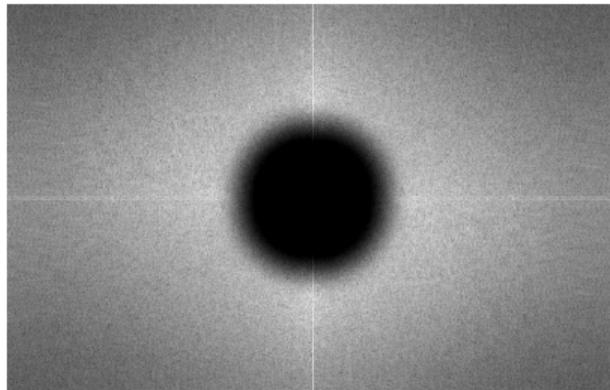
2.3. Analogie des filtres 1D en dimension deux

- Filtres isotropes par rapport à la fréquence nulle

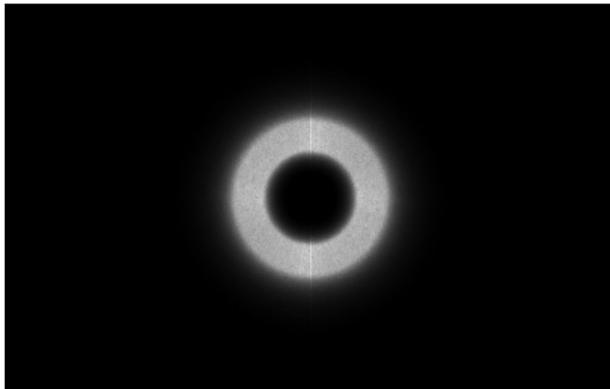
passé-bas



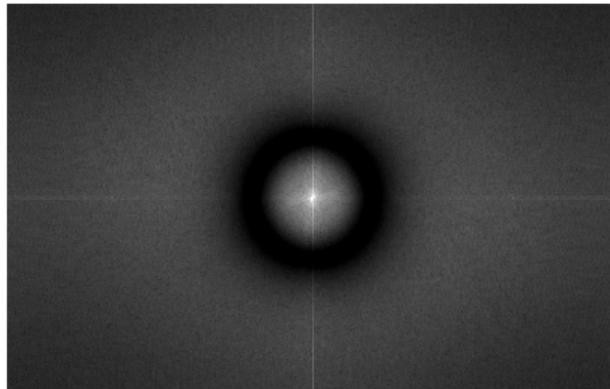
passé-haut



passé-bande



rejet de bande



○ Exemples de filtrage



LP



HP



BP



BR



correction de contraste HP/BP (rôle de la fréquence nulle)

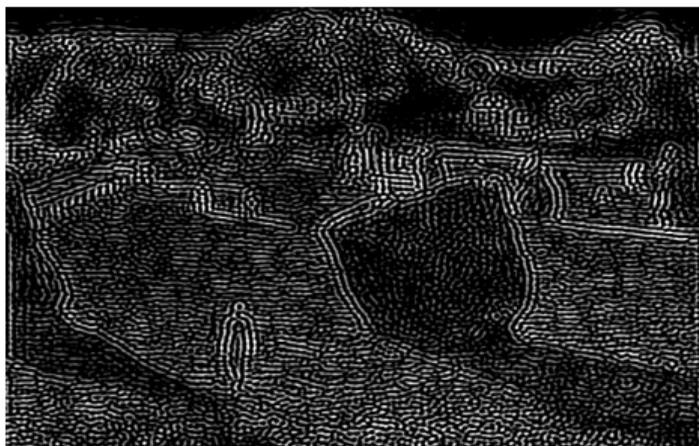
LP



HP



BP



BR



correction de contraste HP/BP (rôle de la fréquence nulle)

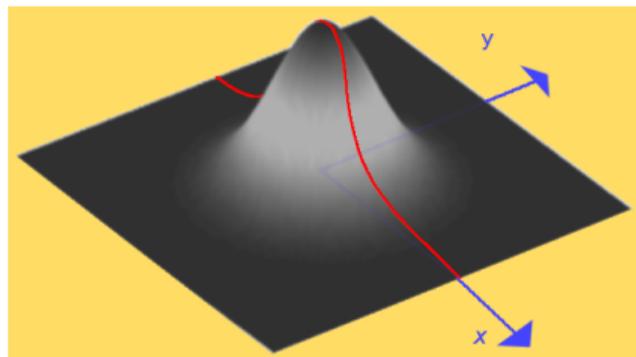
3. Filtres isotropes usuels – alternatives au filtre idéal

3.1. Filtre gaussien

$$G_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

aire 1 : normalisation pour la convolution



- ▶ largeur utile : $3 \times \sigma$
- ▶ fréquence de coupure : 1.178σ (largeur à mi-hauteur)
- ▶ la transformée de Fourier est également une gaussienne

$$\mathcal{F}(G_{\sigma})(x, y) = \exp(-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2))$$

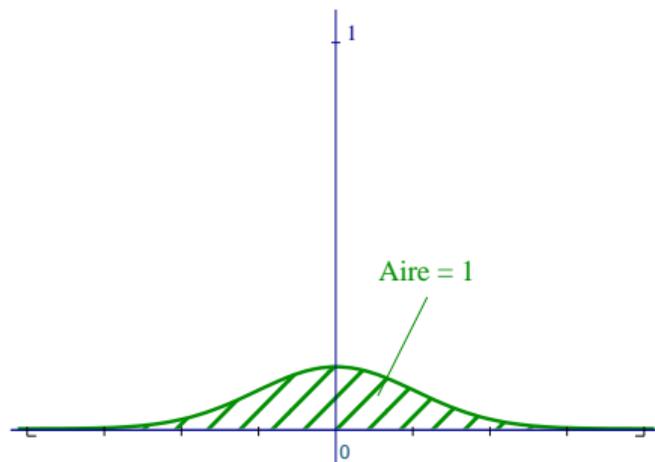
3. Filtrages isotropes usuels – alternatives au filtre idéal

3.1. Filtre gaussien

$$G_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

aire 1 : normalisation pour la convolution

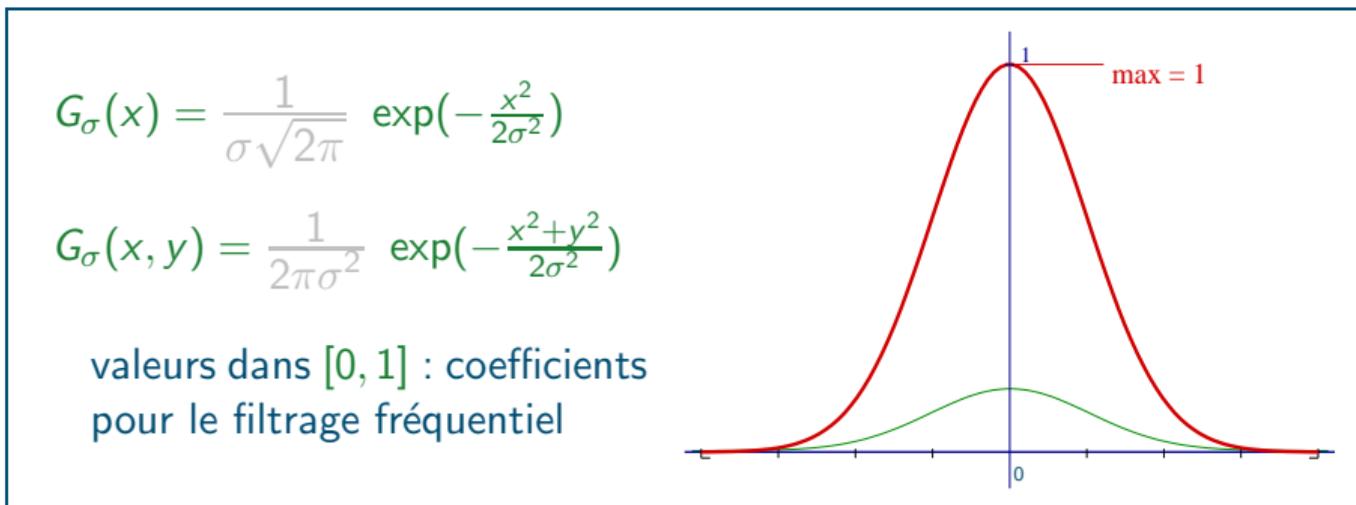


- ▶ largeur utile : $3 \times \sigma$
- ▶ fréquence de coupure : 1.178σ (largeur à mi-hauteur)
- ▶ la transformée de Fourier est également une gaussienne

$$\mathcal{F}(G_{\sigma})(x, y) = \exp(-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2))$$

3. Filtres isotropes usuels – alternatives au filtre idéal

3.1. Filtre gaussien

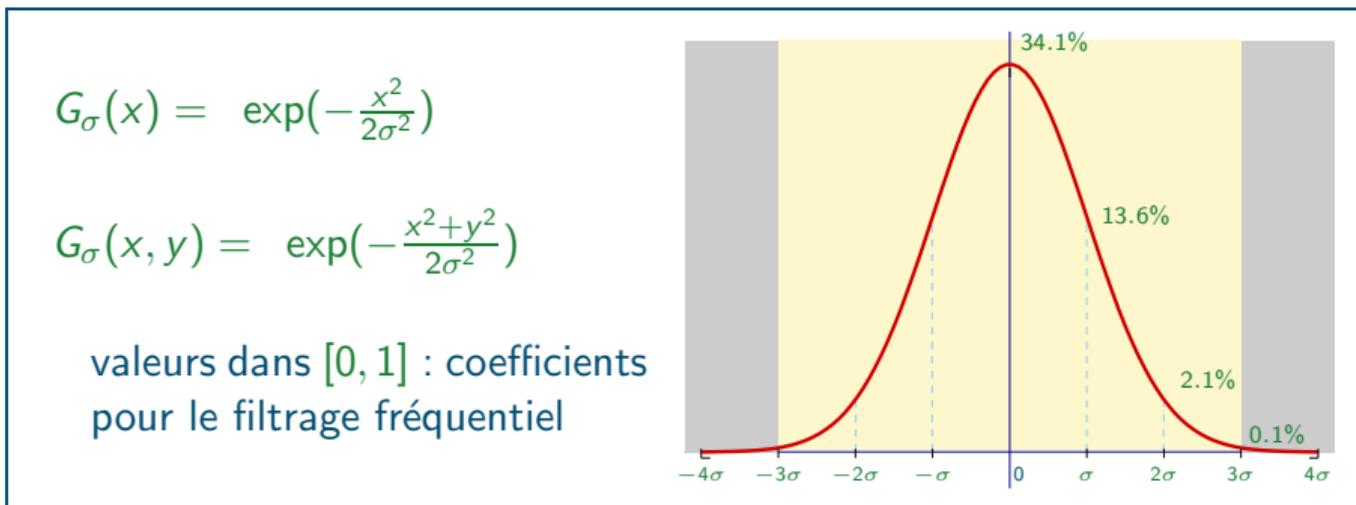


- ▶ largeur utile : $3 \times \sigma$
- ▶ fréquence de coupure : 1.178σ (largeur à mi-hauteur)
- ▶ la transformée de Fourier est également une gaussienne

$$\mathcal{F}(G_{\sigma})(x, y) = \exp(-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2))$$

3. Filtres isotropes usuels – alternatives au filtre idéal

3.1. Filtre gaussien



- ▶ largeur utile : $3 \times \sigma$
- ▶ fréquence de coupure : 1.178σ (largeur à mi-hauteur)
- ▶ la transformée de Fourier est également une gaussienne

$$\mathcal{F}(G_{\sigma})(x, y) = \exp(-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2))$$

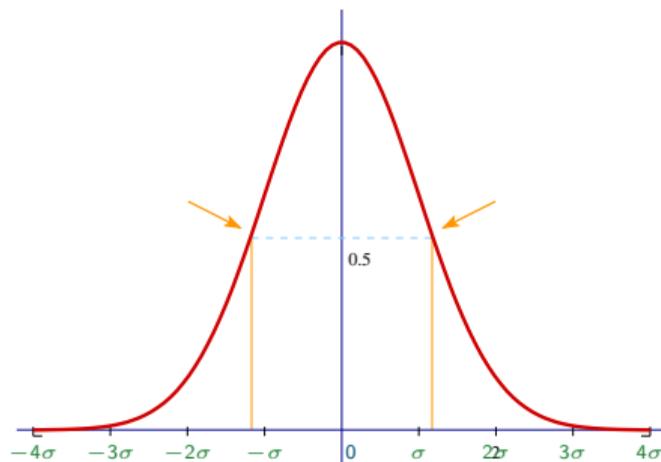
3. Filtres isotropes usuels – alternatives au filtre idéal

3.1. Filtre gaussien

$$G_{\sigma}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$G_{\sigma}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

valeurs dans $[0, 1]$: coefficients
pour le filtrage fréquentiel



- ▶ largeur utile : $3 \times \sigma$
- ▶ fréquence de coupure : 1.178σ (largeur à mi-hauteur)
- ▶ la transformée de Fourier est également une gaussienne

$$\mathcal{F}(G_{\sigma})(x, y) = \exp(-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2))$$

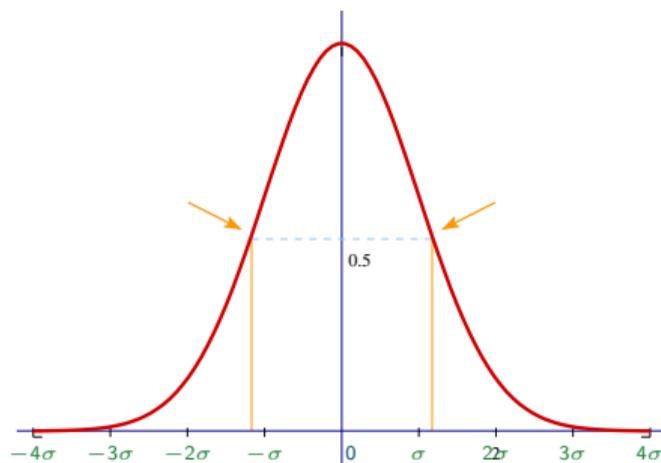
3. Filtres isotropes usuels – alternatives au filtre idéal

3.1. Filtre gaussien

$$G_{\sigma}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$G_{\sigma}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

valeurs dans $[0, 1]$: coefficients
pour le filtrage fréquentiel



- ▶ largeur utile : $3 \times \sigma$
- ▶ fréquence de coupure : 1.178σ (largeur à mi-hauteur)
- ▶ la transformée de Fourier est également une gaussienne

$$\mathcal{F}(G_{\sigma})(x, y) = \exp(-2\pi^2\sigma^2(x^2 + y^2))$$

- ▶ passe bas

$$GLPF(u, v) = \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2}\right)$$

- ▶ passe haut

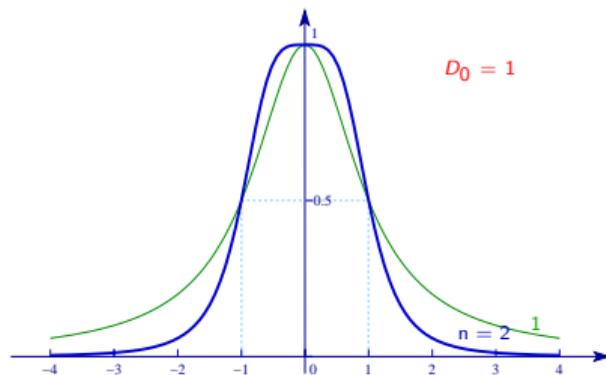
$$GHPF(u, v) = 1 - GLPF(u, v)$$

- ▶ avantage : pas d'écho car pas de coefficients négatifs
- ▶ inconvénient : coupure imprécise

3.2. Filtre de Butterworth

$$H_n(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u, v)}{D_0}\right)^{2n}}$$

avec $D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$



- ▶ D_0 : fréquence de coupure

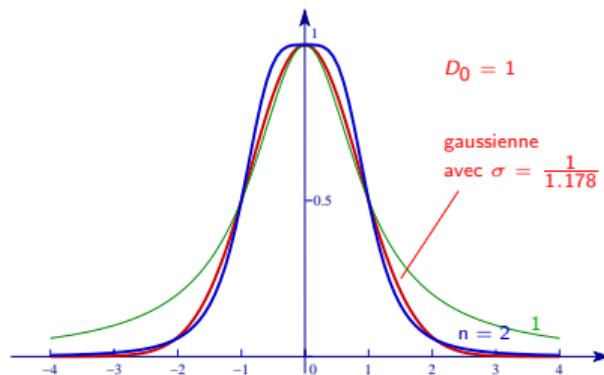
$$D(u, v) = D_0 \Rightarrow H(u, v) = \frac{1}{2}$$

- ▶ famille de filtres offrant un compromis entre le filtre idéal et la gaussienne
- ▶ ordre n : permet de contrôler la largeur de la bande de transition

3.2. Filtre de Butterworth

$$H_n(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u, v)}{D_0}\right)^{2n}}$$

$$\text{avec } D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$



- ▶ D_0 : fréquence de coupure

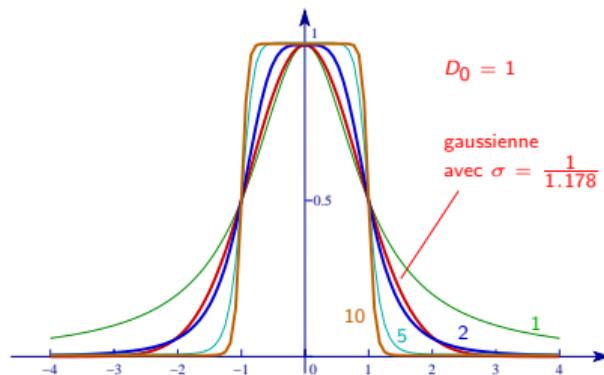
$$D(u, v) = D_0 \Rightarrow H(u, v) = \frac{1}{2}$$

- ▶ famille de filtres offrant un compromis entre le filtre idéal et la gaussienne
- ▶ ordre n : permet de contrôler la largeur de la bande de transition

3.2. Filtre de Butterworth

$$H_n(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u, v)}{D_0}\right)^{2n}}$$

$$\text{avec } D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$



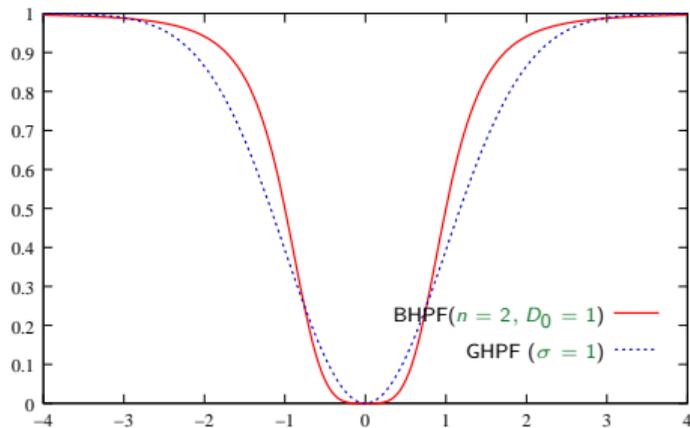
- ▶ D_0 : fréquence de coupure

$$D(u, v) = D_0 \Rightarrow H(u, v) = \frac{1}{2}$$

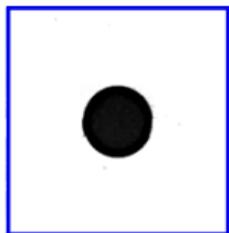
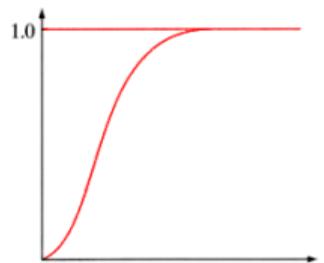
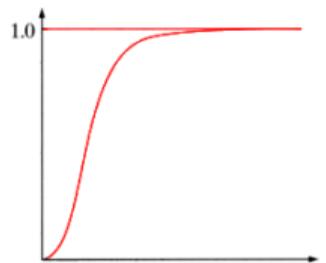
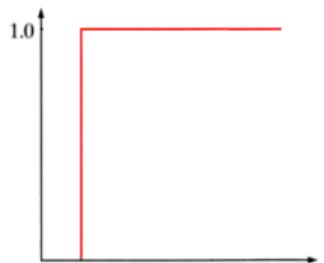
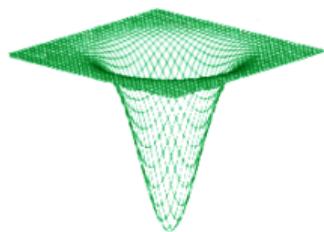
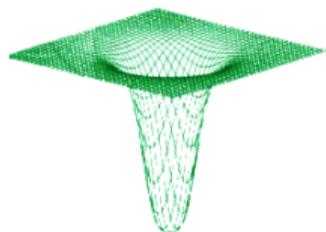
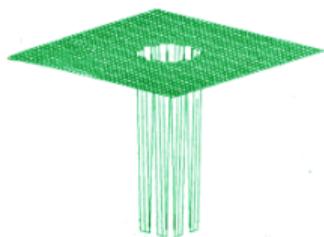
- ▶ famille de filtres offrant un compromis entre le filtre idéal et la gaussienne
- ▶ **ordre n** : permet de contrôler la largeur de la bande de transition

- butterworth passe-haut (BHPF) :

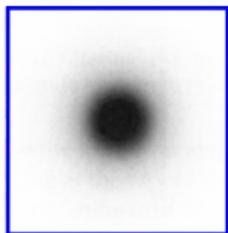
$$\frac{1}{1 + \left(\frac{D_0}{D(u, v)}\right)^{2n}}$$



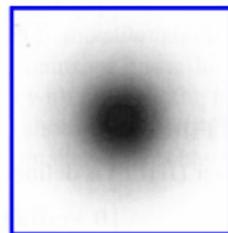
3.3. Comparaison des trois filtres idéal, gaussien et de Butterworth



idéal

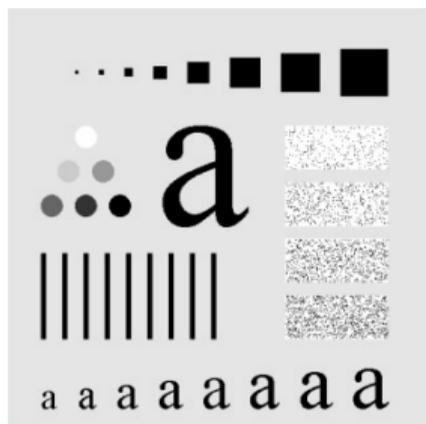


Butterworth

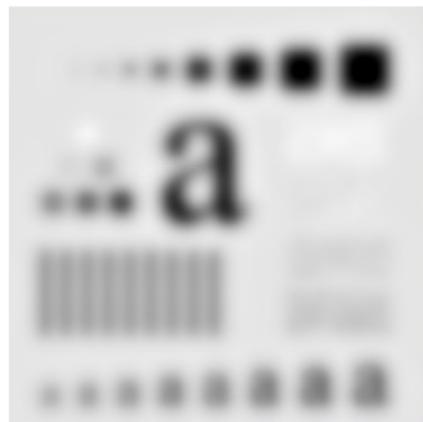
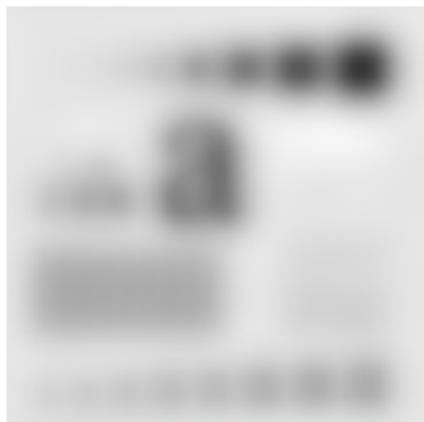


Gaussien

► filtrage passe-bas idéal et Butterworth



idéal



Butterworth

5

10

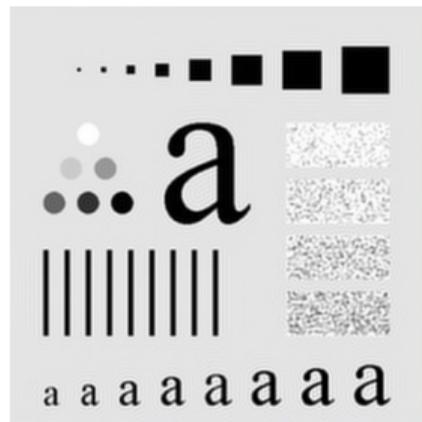
► filtrage passe-bas idéal et Butterworth (suite)



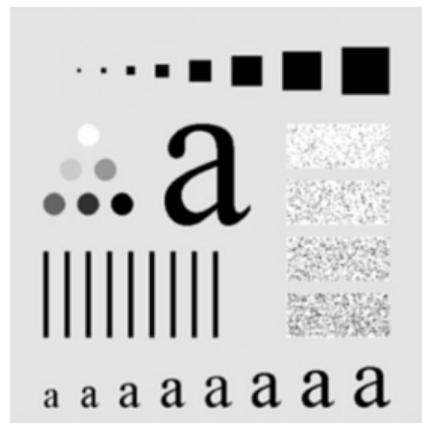
20



50



idéal

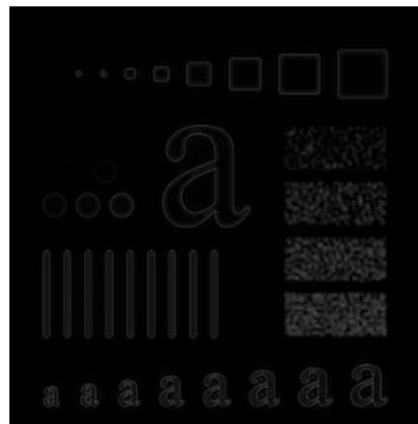
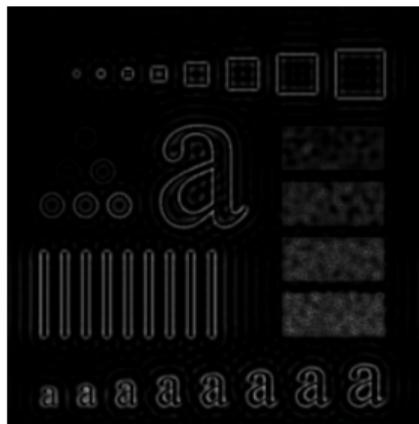


Butterworth

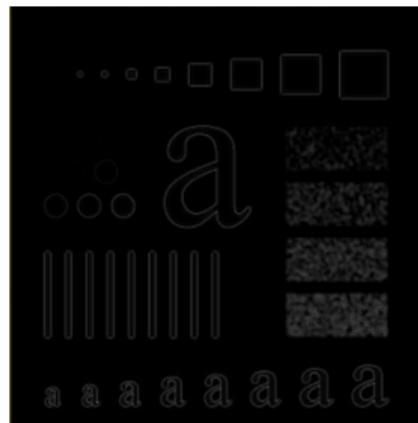
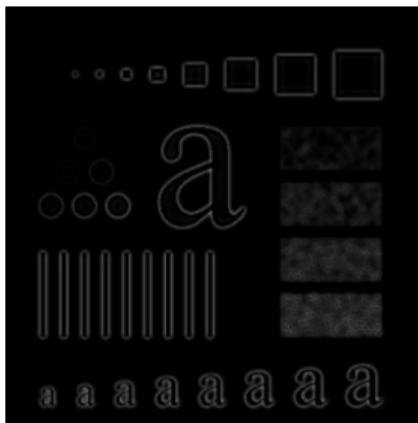
100

► filtrage passe-haut idéal et Butterworth

idéal



Butterworth



coupure

20

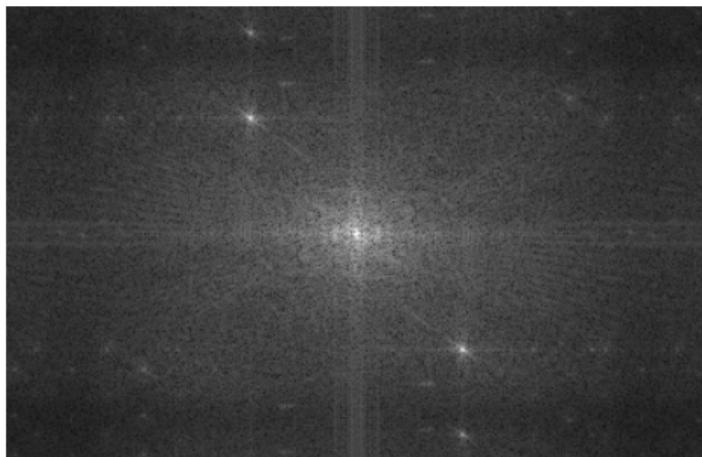
40

80

4. Filtres anisotropes

4.1. Filtres à encoches

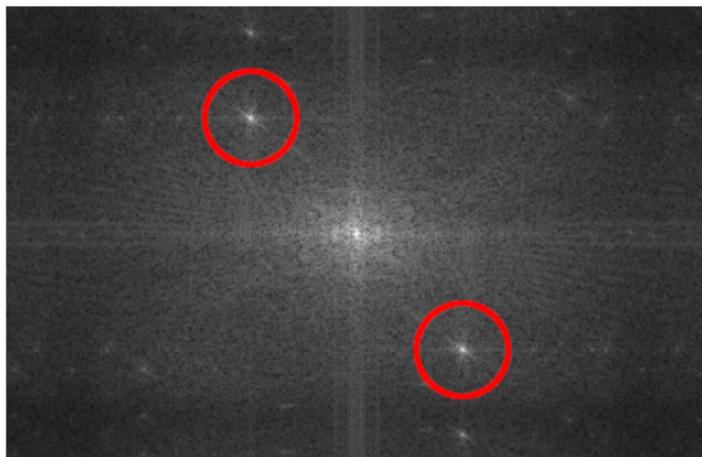
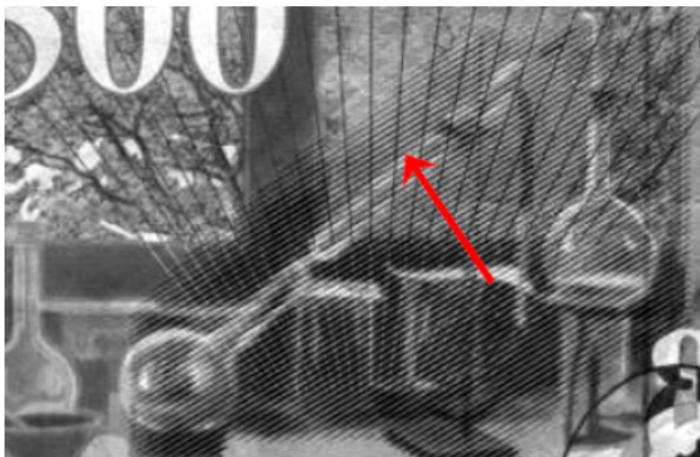
- ▶ *notch filter / notch fourier transform – NFT*
 - ▶ *rejet d'encoche : suppression localisée sur une fréquence directionnelle*
 - ▶ *ex. : traitement de trames périodiques directionnelles*
 - ▶ *filtrage symétrique : on ne conserve que l'encoche (on isole une fréquence directionnelle)*
 - ▶ *filtres facilement exprimables par translation à partir des formulation des filtres passe haut (voir partie C, thème 7)*



4. Filtres anisotropes

4.1. Filtres à encoches

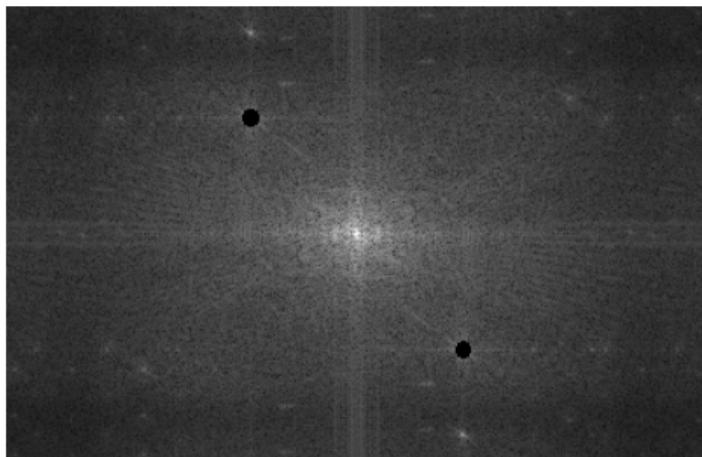
- ▶ *notch filter / notch fourier transform – NFT*
 - ▶ *rejet d'encoche : suppression localisée sur une fréquence directionnelle*
 - ▶ *ex. : traitement de trames périodiques directionnelles*
 - ▶ *filtrage symétrique : on ne conserve que l'encoche (on isole une fréquence directionnelle)*
 - ▶ *filtres facilement exprimables par translation à partir des formulation des filtres passe haut (voir partie C, thème 7)*



4. Filtres anisotropes

4.1. Filtres à encoches

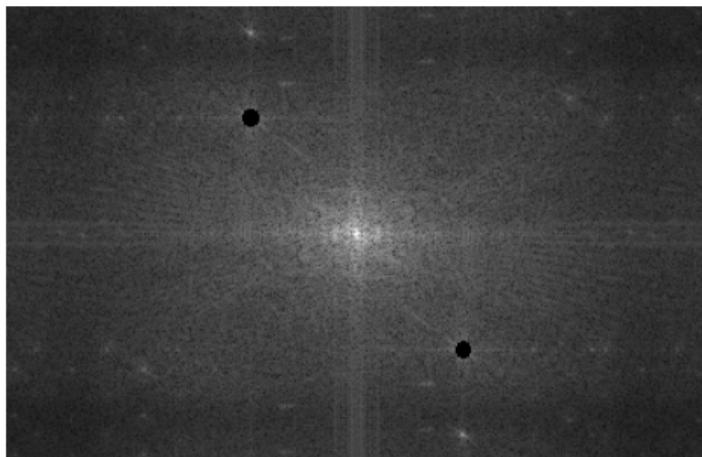
- ▶ *notch filter / notch fourier transform – NFT*
 - ▶ *rejet d'encoche : suppression localisée sur une fréquence directionnelle*
 - ▶ *ex. : traitement de trames périodiques directionnelles*
 - ▶ *filtrage symétrique : on ne conserve que l'encoche (on isole une fréquence directionnelle)*
 - ▶ *filtres facilement exprimables par translation à partir des formulation des filtres passe haut (voir partie C, thème 7)*



4. Filtres anisotropes

4.1. Filtres à encoches

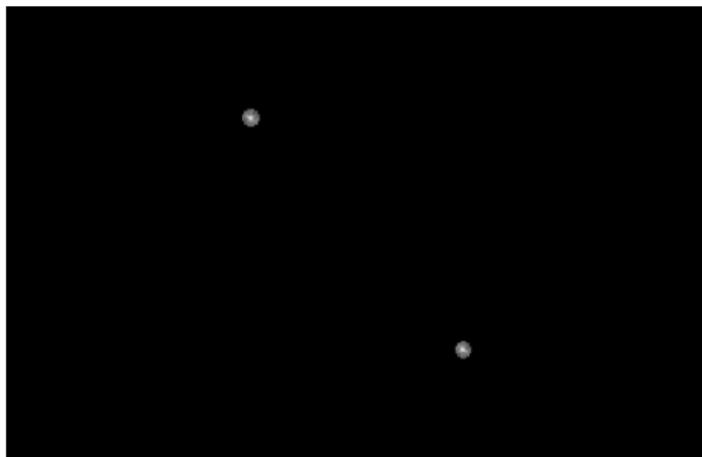
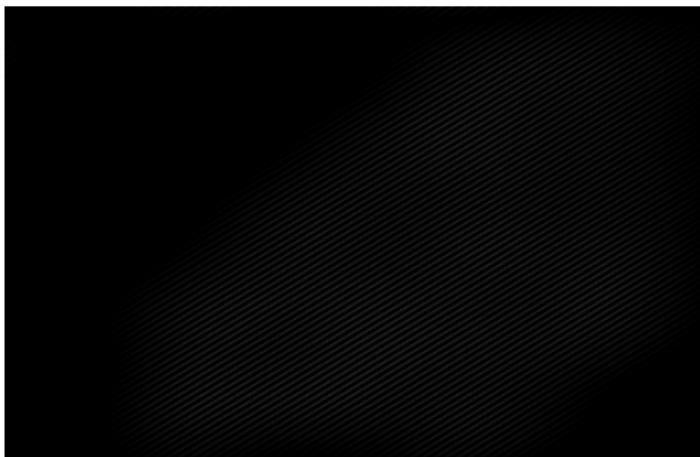
- ▶ *notch filter / notch fourier transform – NFT*
 - ▶ *rejet d'encoche : suppression localisée sur une fréquence directionnelle*
 - ▶ *ex. : traitement de trames périodiques directionnelles*
 - ▶ *filtrage symétrique : on ne conserve que l'encoche (on isole une fréquence directionnelle)*
 - ▶ *filtres facilement exprimables par translation à partir des formulation des filtres passe haut (voir partie C, thème 7)*



4. Filtres anisotropes

4.1. Filtres à encoches

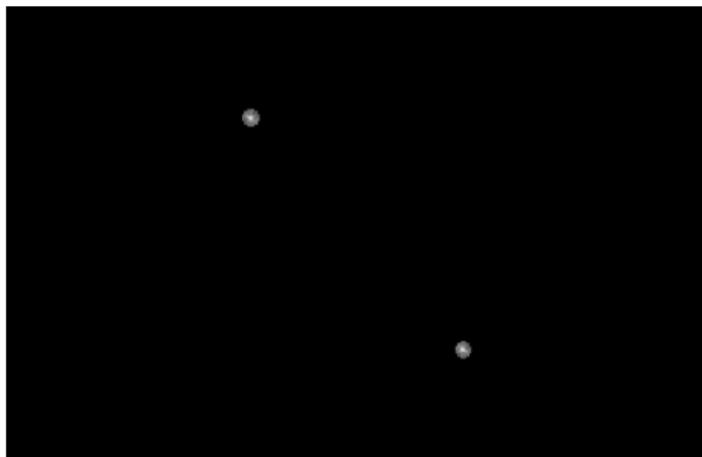
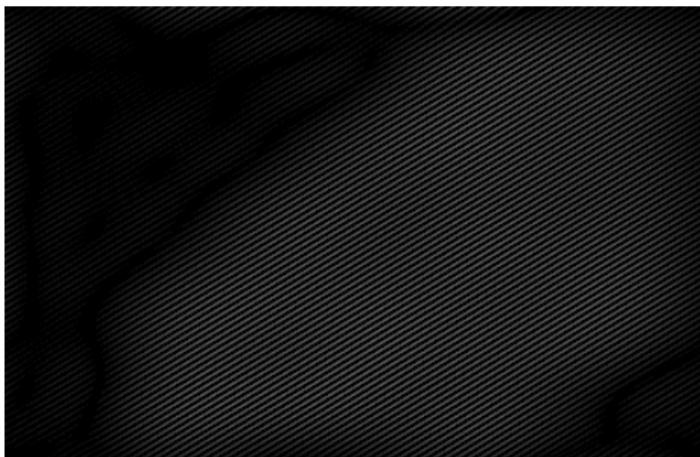
- ▶ *notch filter / notch fourier transform – NFT*
 - ▶ *rejet d'encoche : suppression localisée sur une fréquence directionnelle*
 - ▶ *ex. : traitement de trames périodiques directionnelles*
 - ▶ *filtrage symétrique : on ne conserve que l'encoche (on isole une fréquence directionnelle)*
 - ▶ *filtres facilement exprimables par translation à partir des formulation des filtres passe haut (voir partie C, thème 7)*



4. Filtres anisotropes

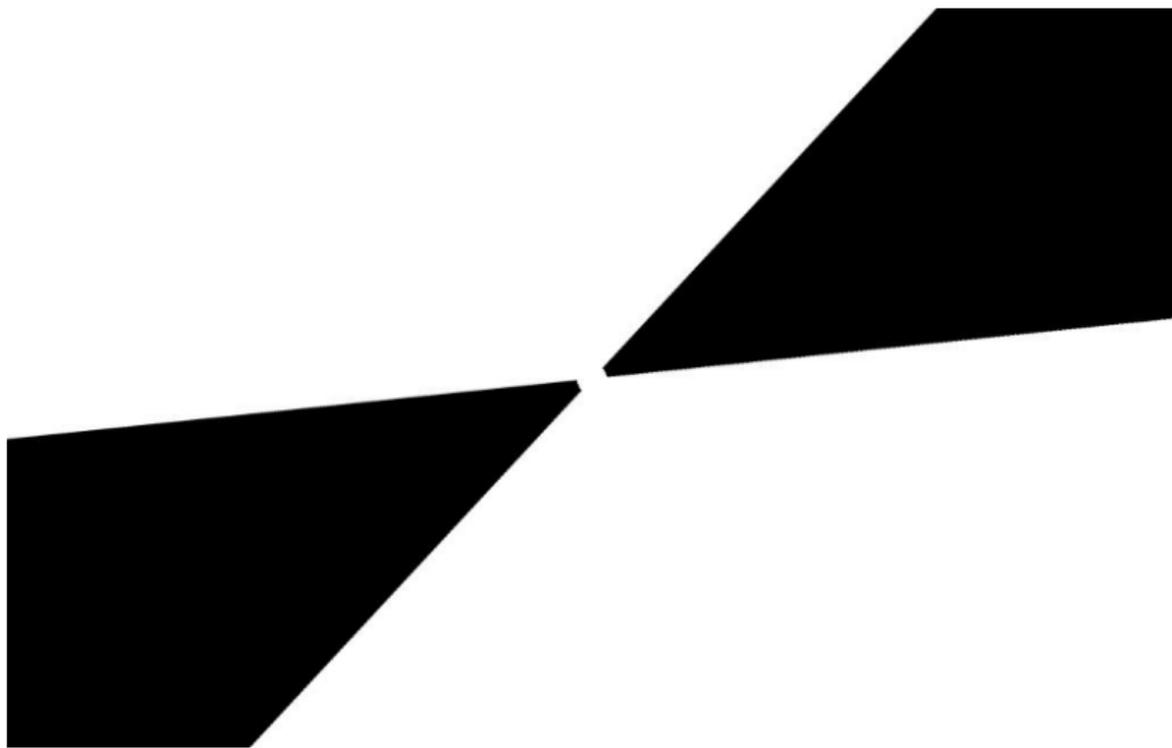
4.1. Filtres à encoches

- ▶ *notch filter / notch fourier transform – NFT*
 - ▶ *rejet d'encoche : suppression localisée sur une fréquence directionnelle*
 - ▶ *ex. : traitement de trames périodiques directionnelles*
 - ▶ *filtrage symétrique : on ne conserve que l'encoche (on isole une fréquence directionnelle)*
 - ▶ *filtres facilement exprimables par translation à partir des formulation des filtres passe haut (voir partie C, thème 7)*



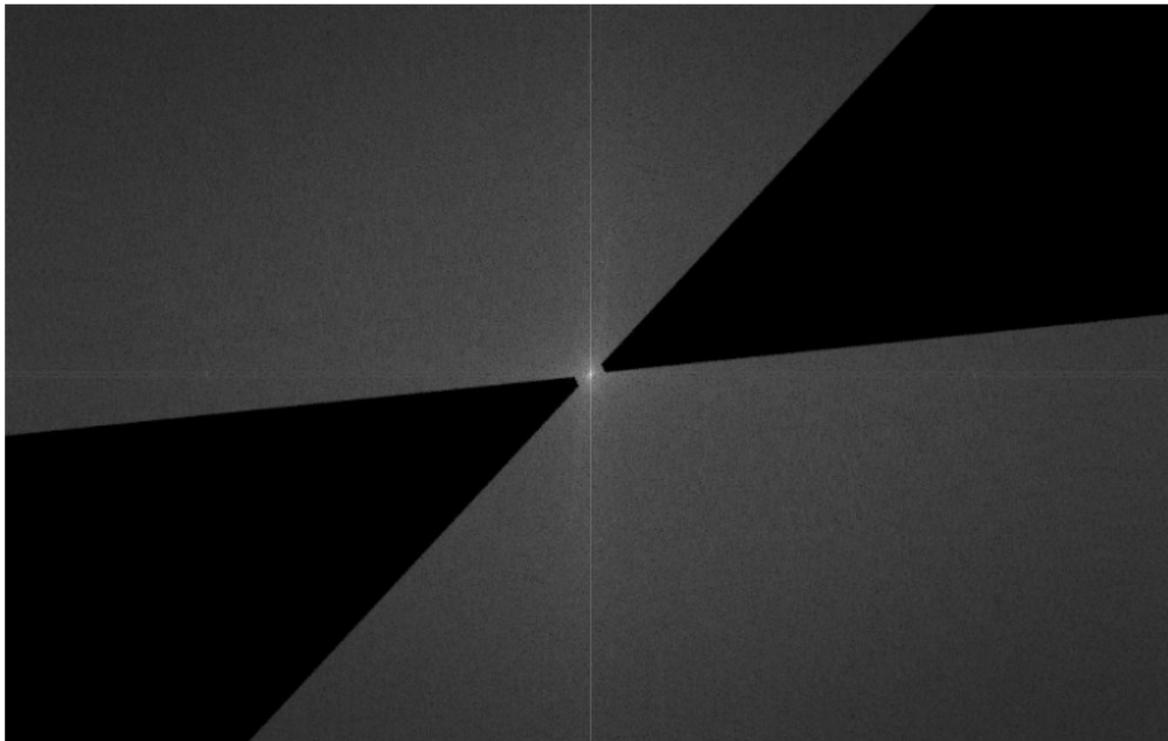
4.2. Filtrages directionnels

- ▶ *modification de fréquences autour d'une direction dans le spectre*
- ▶ *traitement de contours, détails... relativement à une direction*



4.2. Filtrages directionnels

- ▶ *modification de fréquences autour d'une direction dans le spectre*
- ▶ *traitement de contours, détails... relativement à une direction*



4.2. Filtrages directionnels

- ▶ *modification de fréquences autour d'une direction dans le spectre*
- ▶ *traitement de contours, détails... relativement à une direction*



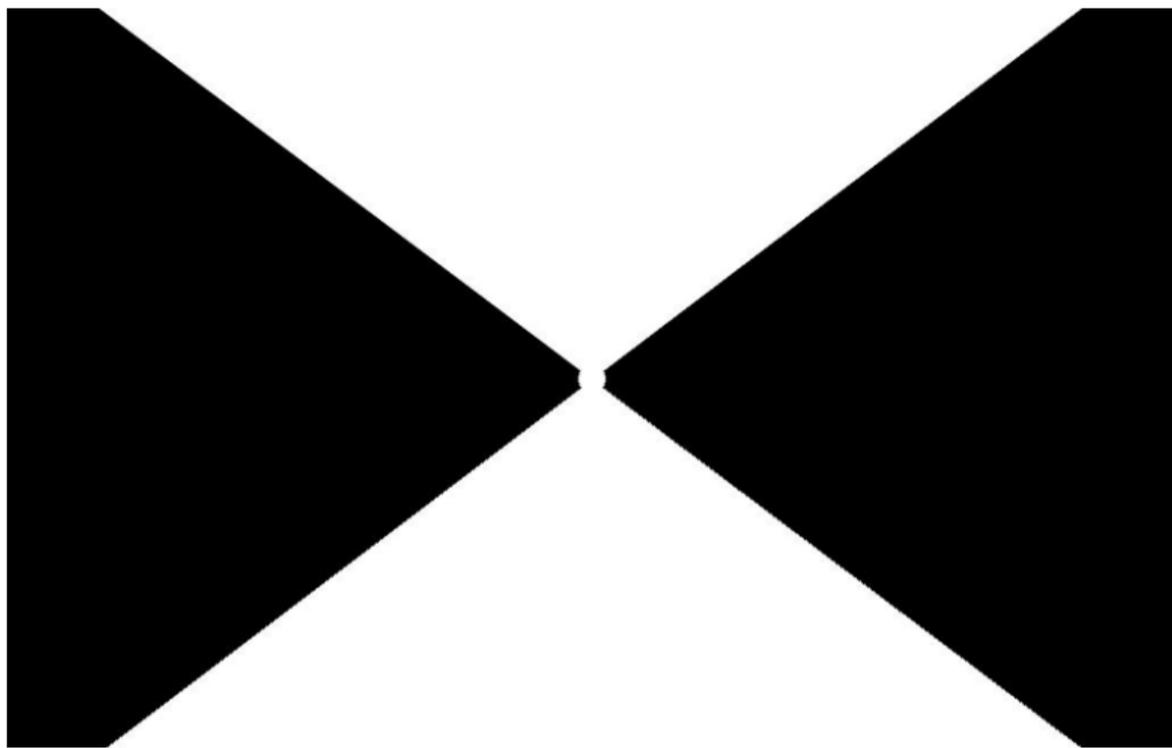
4.2. Filtrages directionnels

- ▶ *modification de fréquences autour d'une direction dans le spectre*
- ▶ *traitement de contours, détails... relativement à une direction*



4.2. Filtrages directionnels

- ▶ *modification de fréquences autour d'une direction dans le spectre*
- ▶ *traitement de contours, détails... relativement à une direction*



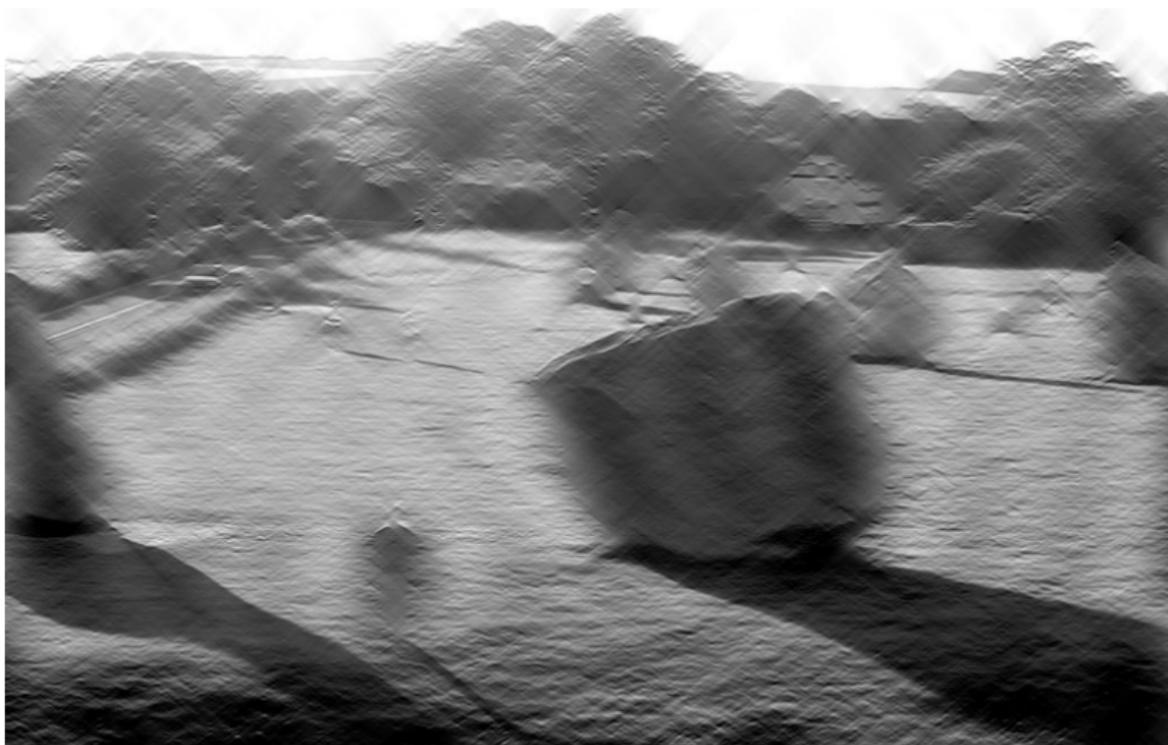
4.2. Filtrages directionnels

- ▶ *modification de fréquences autour d'une direction dans le spectre*
- ▶ *traitement de contours, détails... relativement à une direction*



4.2. Filtrages directionnels

- ▶ *modification de fréquences autour d'une direction dans le spectre*
- ▶ *traitement de contours, détails... relativement à une direction*



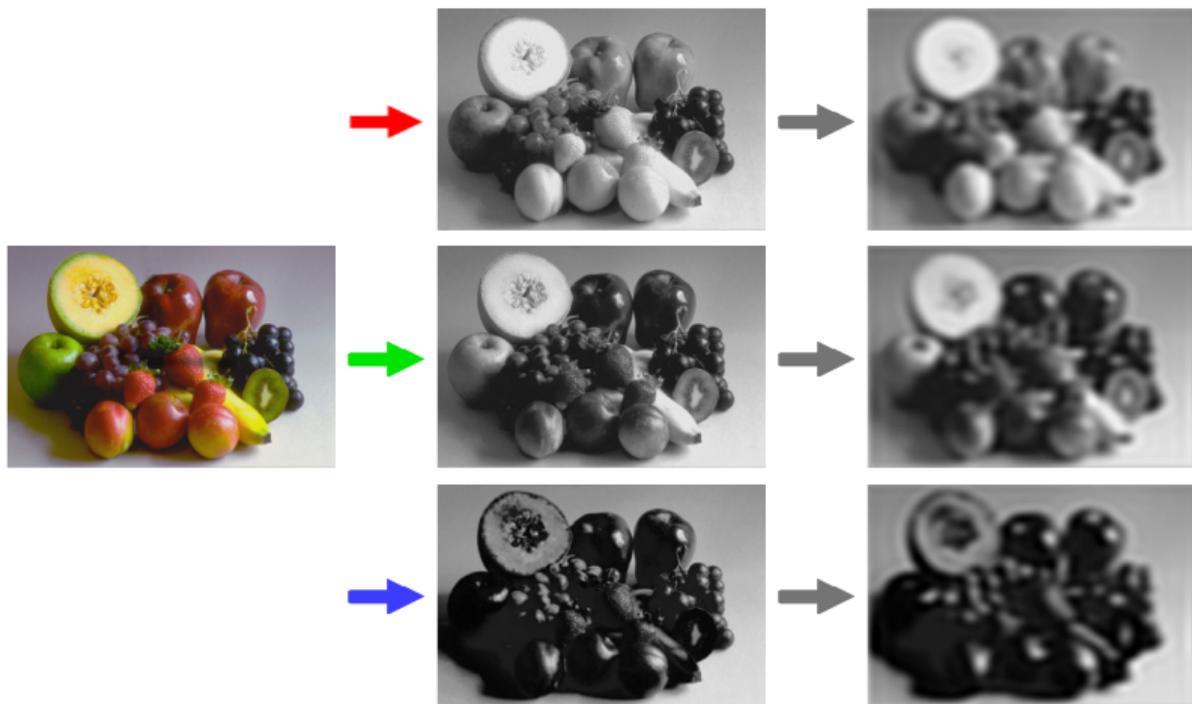
5. Filtrage fréquentiel d'images couleur

- ▶ images RGB : traitement marginal



5. Filtrage fréquentiel d'images couleur

- ▶ images RGB : traitement marginal



5. Filtrage fréquentiel d'images couleur

- ▶ images RGB : traitement marginal

