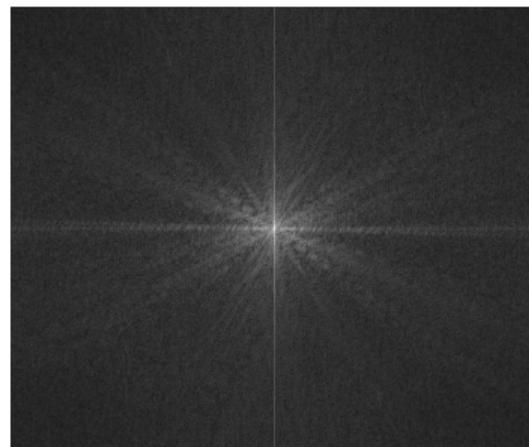


Partie A — thème 4

Représentation fréquentielle des images 2D



Représentation spatiale : organisation géométrique de l'image projetée sur la rétine

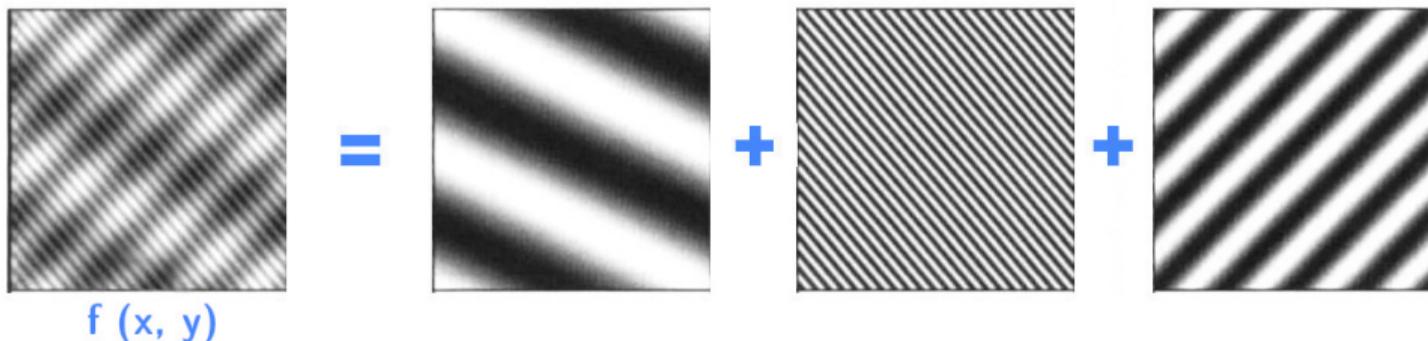


Représentation fréquentielle : prise en compte des variations au sein de la représentation spatiale

1. Transformée de Fourier 2D : quoi, pourquoi, comment

○ Quoi : changement d'espace de représentation

- ▶ on considère une image monochrome 2D décrite par une fonction $f(x, y)$
- ... pouvant s'exprimer comme une somme *d'oscillations sinusoïdales directionnelles*

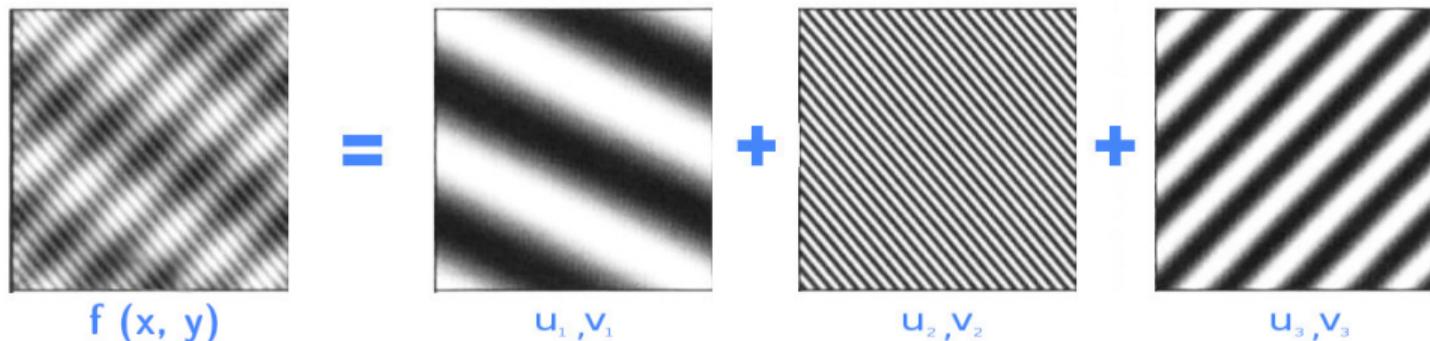


- ▶ chaque oscillation peut être caractérisée par un couple (direction, fréquence) représentable par un vecteur (u_i, v_i)
- ▶ on décrit la contribution de chaque oscillation (u_i, v_i) par une fonction $F(u_i, v_i)$
- ▶ cette décomposition en somme de fréquences directionnelles est possible pour toute image $f(x, y)$
- ▶ la fonction $F(u, v)$ qui permet de la construire est sa transformée de Fourier

1. Transformée de Fourier 2D : quoi, pourquoi, comment

○ Quoi : changement d'espace de représentation

- ▶ on considère une image monochrome 2D décrite par une fonction $f(x, y)$
- ... pouvant s'exprimer comme une somme *d'oscillations sinusoidales directionnelles*

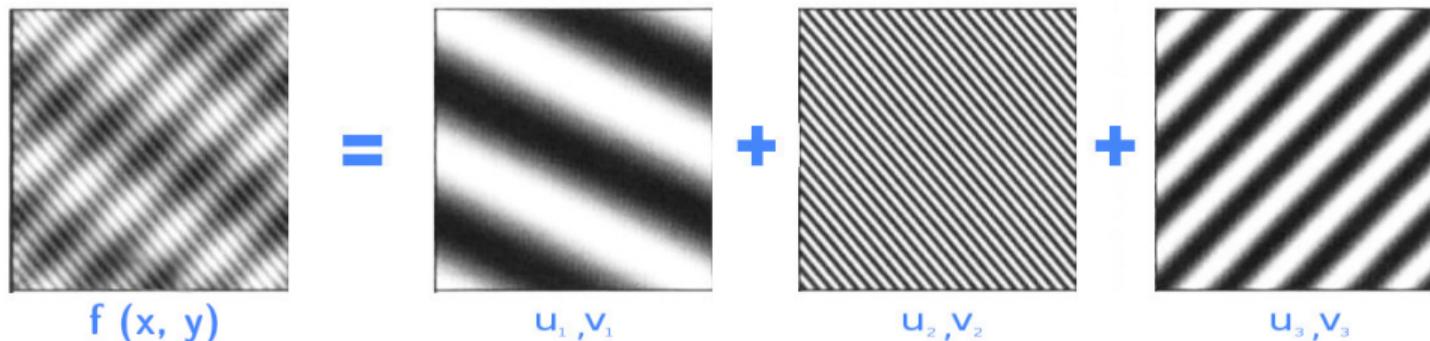


- ▶ chaque oscillation peut être caractérisée par un couple (direction, fréquence) représentable par un vecteur (u_i, v_i)
- ▶ on décrit la contribution de chaque oscillation (u_i, v_i) par une fonction $F(u_i, v_i)$
- ▶ cette décomposition en somme de fréquences directionnelles est possible pour toute image $f(x, y)$
- ▶ la fonction $F(u, v)$ qui permet de la construire est sa transformée de Fourier

1. Transformée de Fourier 2D : quoi, pourquoi, comment

○ Quoi : changement d'espace de représentation

- ▶ on considère une image monochrome 2D décrite par une fonction $f(x, y)$
- ... pouvant s'exprimer comme une somme *d'oscillations sinusoïdales directionnelles*

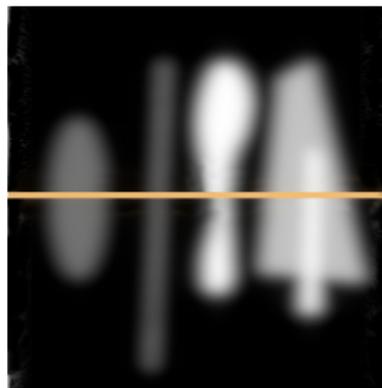


- ▶ chaque oscillation peut être caractérisée par un couple (direction, fréquence) représentable par un vecteur (u_i, v_i)
- ▶ on décrit la contribution de chaque oscillation (u_i, v_i) par une fonction $F(u_i, v_i)$
- ▶ cette décomposition en somme de fréquences directionnelles est possible pour toute image $f(x, y)$
- ▶ la fonction $F(u, v)$ qui permet de la construire est sa transformée de Fourier

○ Pourquoi : pour exprimer et exploiter les caractéristiques fréquentielles de l'image

▶ fréquences basses : transitions lentes, zones homogènes...

▶ fréquences hautes : transitions rapides, détails...



▶ permet d'effectuer des traitements dans le domaine fréquentiel

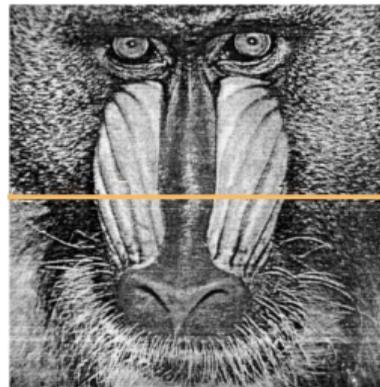
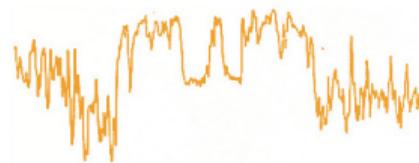
▶ *analyse des caractéristiques de l'image*

▶ *traitements restreints à certaines fréquences : suppression de défauts périodiques, etc.*

○ Pourquoi : pour exprimer et exploiter les caractéristiques fréquentielles de l'image

▶ fréquences basses : transitions lentes, zones homogènes...

▶ fréquences hautes : transitions rapides, détails...



▶ permet d'effectuer des traitements dans le domaine fréquentiel

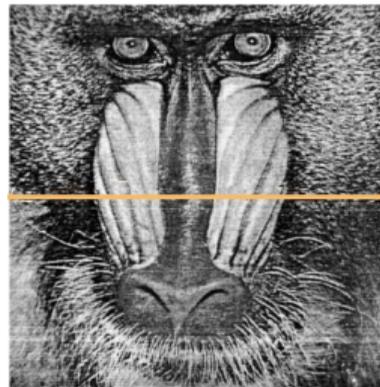
▶ *analyse des caractéristiques de l'image*

▶ *traitements restreints à certaines fréquences : suppression de défauts périodiques, etc.*

○ Pourquoi : pour exprimer et exploiter les caractéristiques fréquentielles de l'image

▶ fréquences basses : transitions lentes, zones homogènes...

▶ fréquences hautes : transitions rapides, détails...



▶ permet d'effectuer des traitements dans le domaine fréquentiel

▶ analyse des caractéristiques de l'image

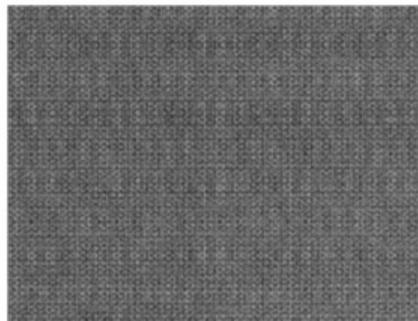
▶ traitements restreints à certaines fréquences : suppression de défauts périodiques, etc.



=



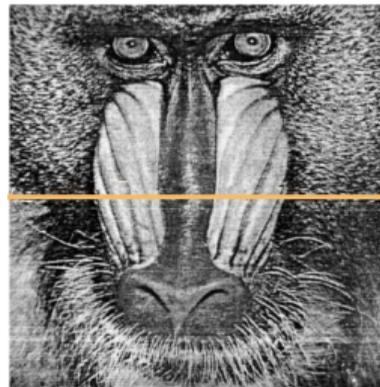
+



○ Pourquoi : pour exprimer et exploiter les caractéristiques fréquentielles de l'image

▶ fréquences basses : transitions lentes, zones homogènes...

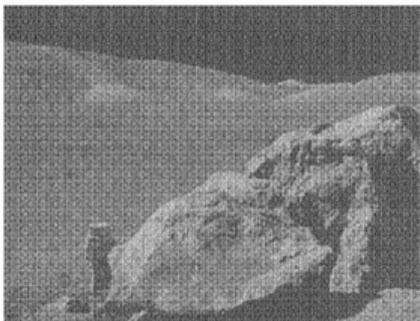
▶ fréquences hautes : transitions rapides, détails...



▶ permet d'effectuer des traitements dans le domaine fréquentiel

▶ analyse des caractéristiques de l'image

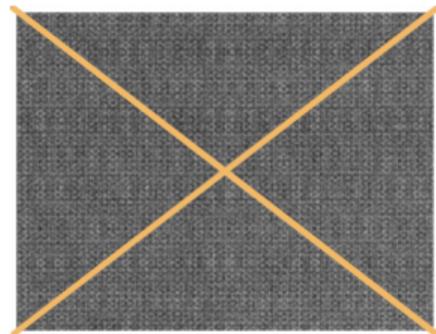
▶ traitements restreints à certaines fréquences : suppression de défauts périodiques, etc.



=

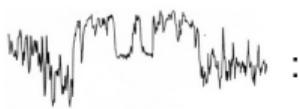


+



○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les **directions**

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

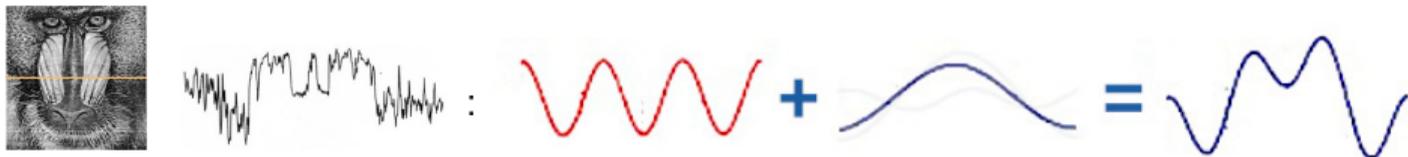
- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les **directions**

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

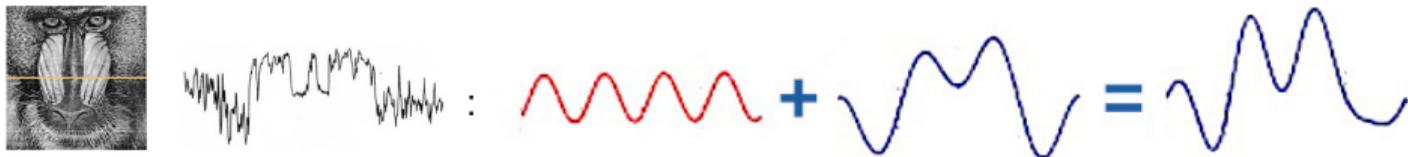
- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les **directions**

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

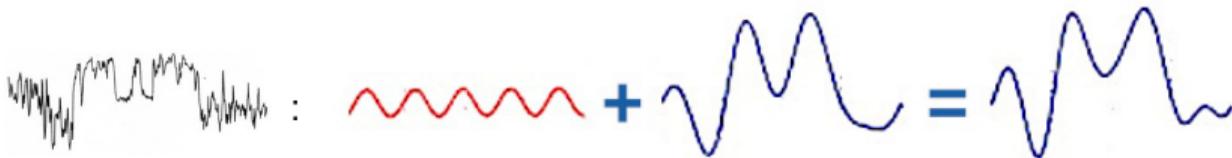
- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les **directions**

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

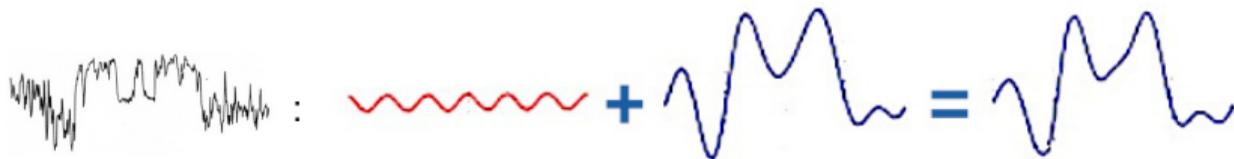
- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les directions

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les directions

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

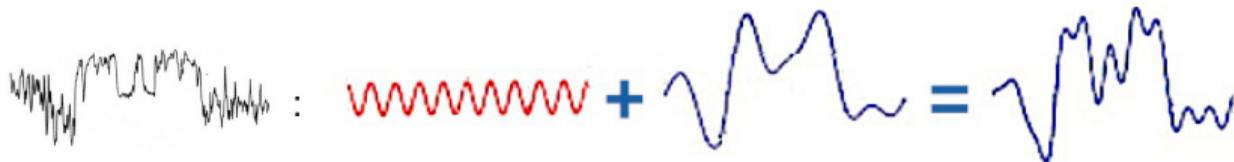
- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les **directions**

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

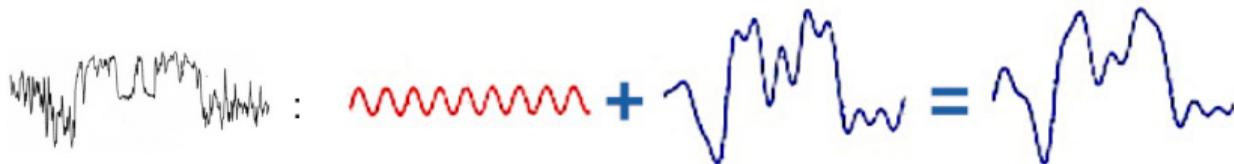
- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les directions

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

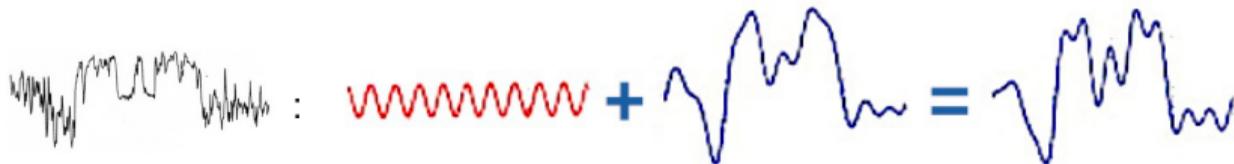
- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les directions

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

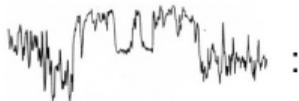
- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les **directions**

- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

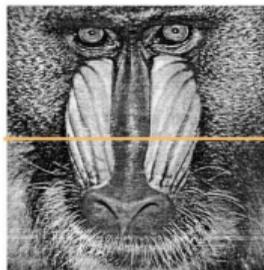
○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les **directions**

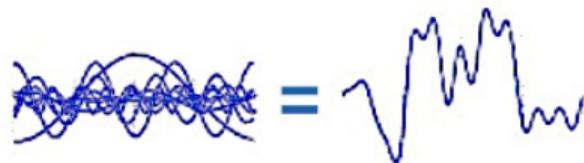
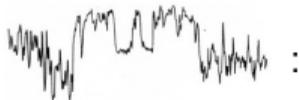


- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

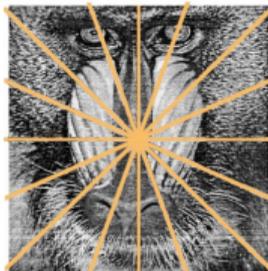
○ **Comment : décomposition en somme de fréquences**

- ▶ en 1D : somme de sinusôides



contribution de chaque sinusôide : fréquence \rightarrow amplitude, phase

- ▶ en 2D, on effectue cette construction dans toutes les **directions**



- ▶ **transformation de Fourier 2D** : outil mathématique qui permet de calculer cette décomposition

$$\mathcal{F} : f(x, y) \rightarrow F(u, v)$$

2. Spectres d'amplitude et de phase (1D)

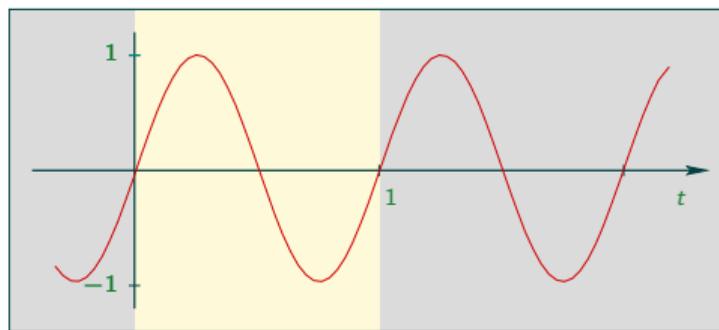
○ Fréquence, amplitude et phase

- ▶ en 1D, une sinusoïde

$$s(t) = a \sin(2\pi ut + \varphi)$$

est caractérisée par le triplet a, u, φ :

u	fréquence	1
a	amplitude	1
φ	phase	0



- ▶ à chaque fréquence u est associée à une paire a, φ :

$F(u)$	\mapsto	(a, φ)
1		(1, 0)

2. Spectres d'amplitude et de phase (1D)

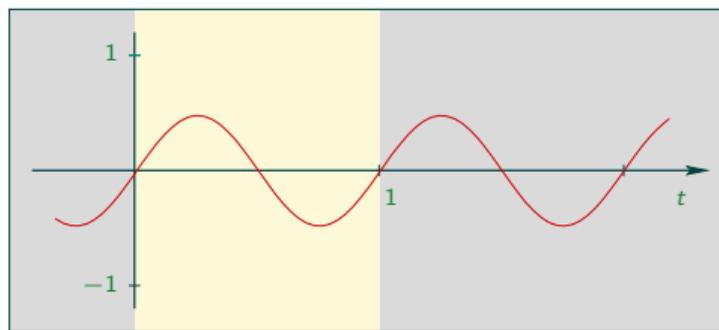
○ Fréquence, amplitude et phase

- ▶ en 1D, une sinusoïde

$$s(t) = a \sin(2\pi ut + \varphi)$$

est caractérisée par le triplet a, u, φ :

u	fréquence	1
a	amplitude	0.5
φ	phase	0



- ▶ à chaque fréquence u est associée à une paire a, φ :

$F(u)$	\mapsto	(a, φ)
1		$(0.5, 0)$

2. Spectres d'amplitude et de phase (1D)

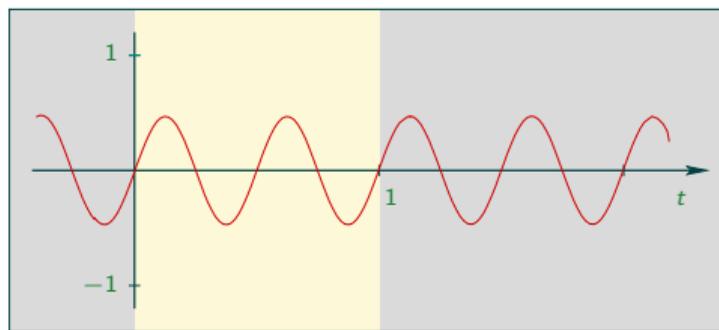
○ Fréquence, amplitude et phase

- ▶ en 1D, une sinusoïde

$$s(t) = a \sin(2\pi ut + \varphi)$$

est caractérisée par le triplet a, u, φ :

u	fréquence	2
a	amplitude	0.5
φ	phase	0



- ▶ à chaque fréquence u est associée à une paire a, φ :

$F(u)$	\mapsto	(a, φ)
2		(0.5, 0)

2. Spectres d'amplitude et de phase (1D)

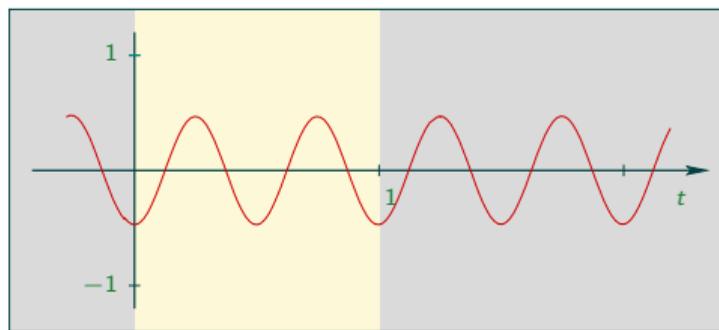
○ Fréquence, amplitude et phase

- ▶ en 1D, une sinusoïde

$$s(t) = a \sin(2\pi ut + \varphi)$$

est caractérisée par le triplet a, u, φ :

u	fréquence	2
a	amplitude	0.5
φ	phase	$-0.25 \times 2\pi$

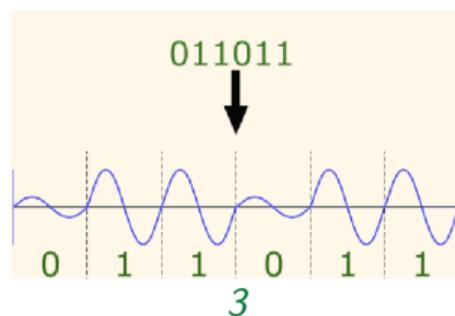
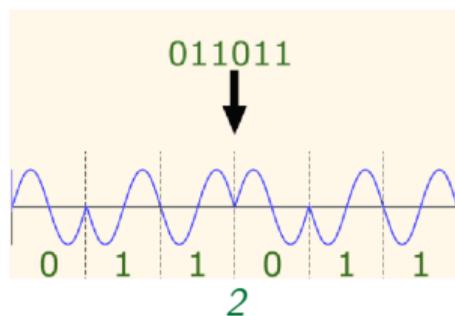
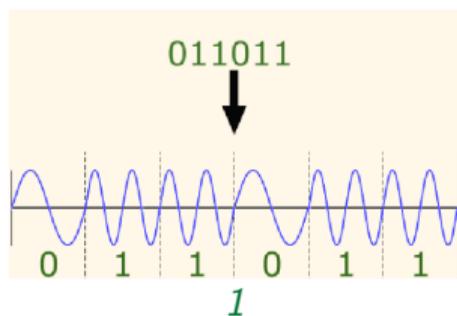


- ▶ à chaque fréquence u est associée à une paire a, φ :

$F(u)$	\mapsto	(a, φ)
2		$(0.5, -0.25 \times 2\pi)$

★ Fréquence – amplitude – phase

Pour coder une information binaire en modulation de fréquence (MF), modulation d'amplitude (MA) ou modulation de phase (MP), on représente les deux caractères 0 et 1 par deux périodes de fréquence, amplitude ou phase distinctes



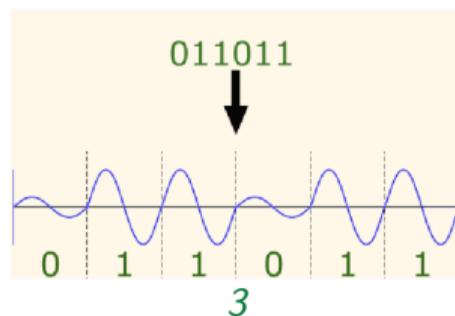
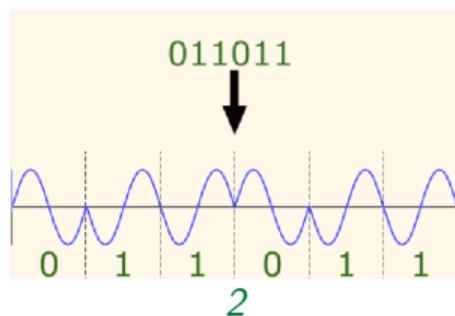
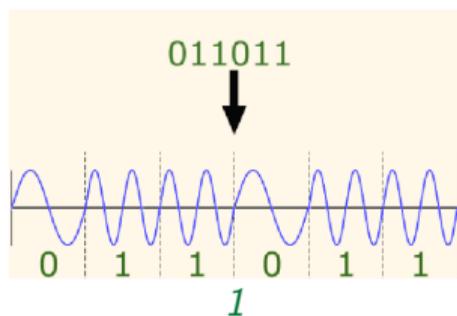
Le signal 011011 est codé en :

	1	2	3
A	MP	MF	MA
B	MF	MA	MP

	1	2	3
C	MF	MP	MA
D	MA	MP	MF

★ Fréquence – amplitude – phase

Pour coder une information binaire en modulation de fréquence (MF), modulation d'amplitude (MA) ou modulation de phase (MP), on représente les deux caractères 0 et 1 par deux périodes de fréquence, amplitude ou phase distinctes

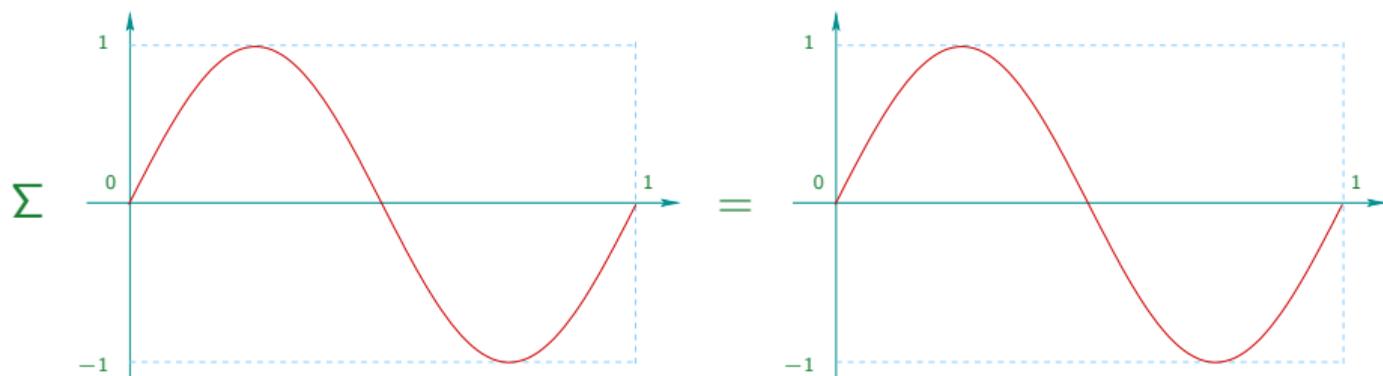


Le signal 011011 est codé en :

	1	2	3
A	MP	MF	MA
B	MF	MA	MP

	1	2	3
C	MF	MP	MA
D	MA	MP	MF

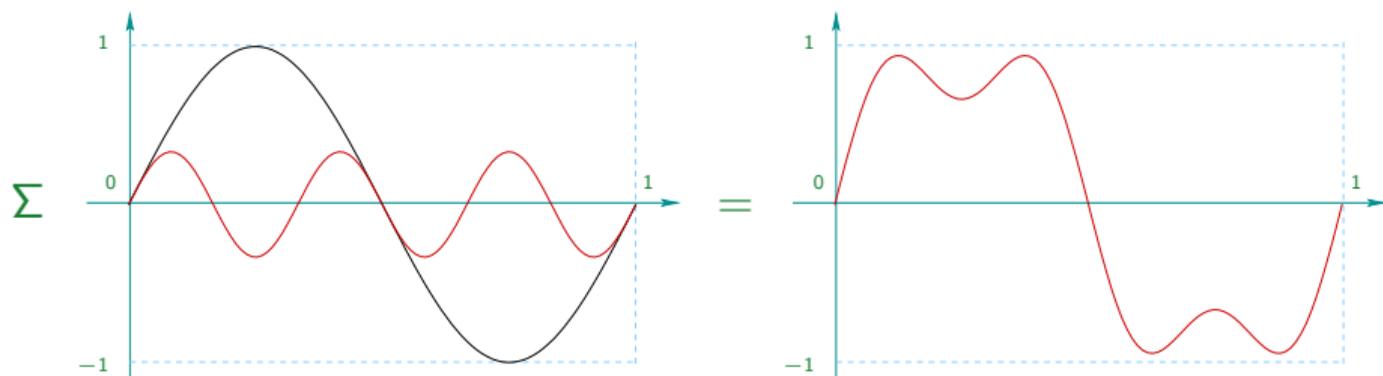
○ Spectre d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoides



1	\mapsto	(1, 0)
3	\mapsto	$(\frac{1}{3}, 0)$
5	\mapsto	$(\frac{1}{5}, 0)$
7	\mapsto	$(\frac{1}{7}, 0)$
9	\mapsto	$(\frac{1}{9}, 0)$

- ▶ prolongement de la construction à l'infini : signal carré
- ▶ cas général : spectre d'amplitude et spectre de phase

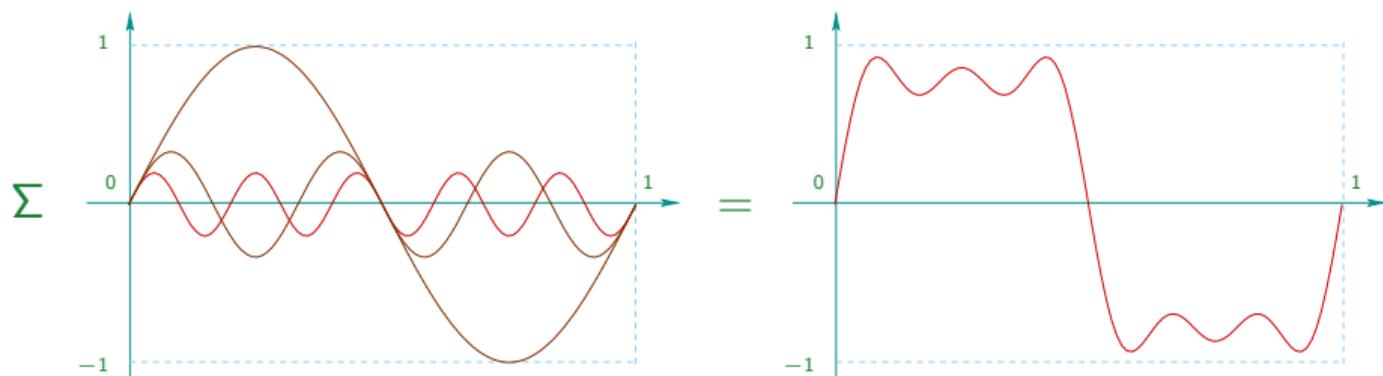
○ Spectre d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoides



1	\mapsto	$(1, 0)$
3	\mapsto	$(\frac{1}{3}, 0)$
5	\mapsto	$(\frac{1}{5}, 0)$
7	\mapsto	$(\frac{1}{7}, 0)$
9	\mapsto	$(\frac{1}{9}, 0)$

- ▶ prolongement de la construction à l'infini : signal carré
- ▶ cas général : spectre d'amplitude et spectre de phase

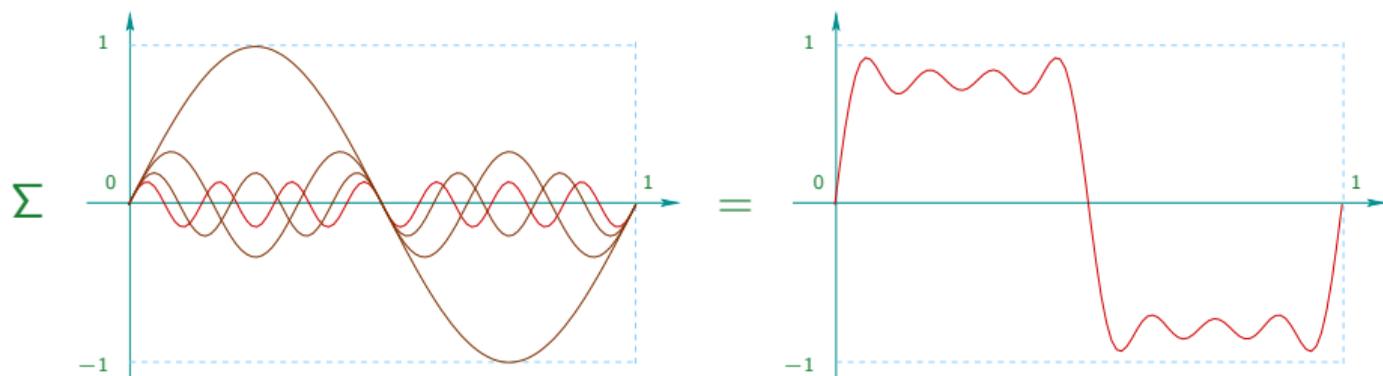
○ Spectre d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoides



1	↦	$(1, 0)$
3	↦	$(\frac{1}{3}, 0)$
5	↦	$(\frac{1}{5}, 0)$
7	↦	$(\frac{1}{7}, 0)$
9	↦	$(\frac{1}{9}, 0)$

- ▶ prolongement de la construction à l'infini : signal carré
- ▶ cas général : spectre d'amplitude et spectre de phase

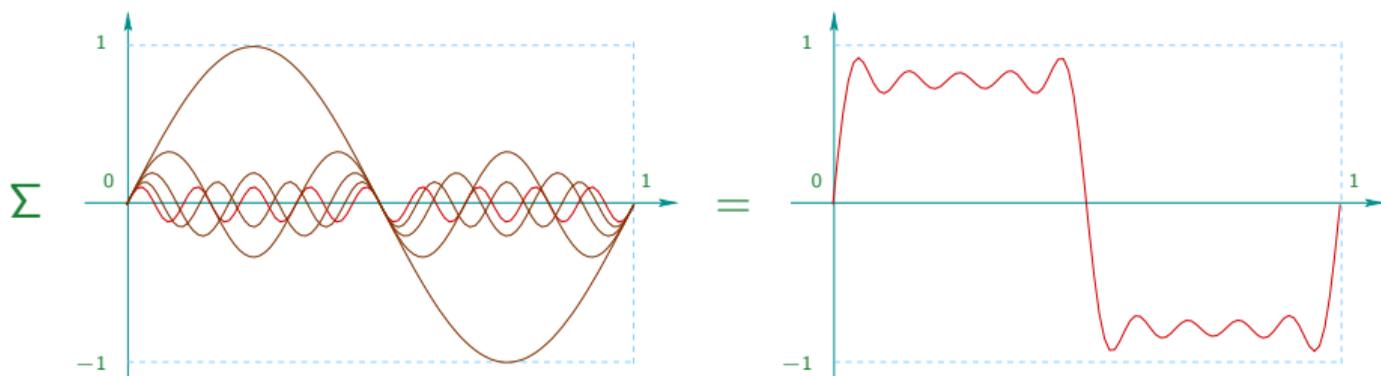
○ Spectre d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoides



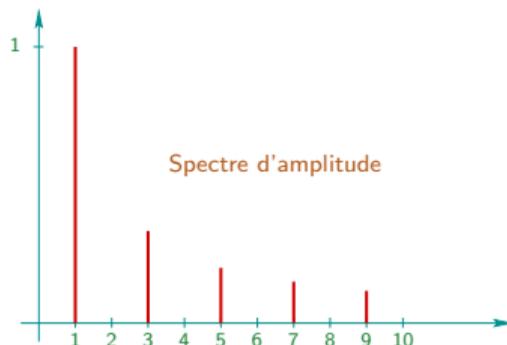
1	↦	$(1, 0)$
3	↦	$(\frac{1}{3}, 0)$
5	↦	$(\frac{1}{5}, 0)$
7	↦	$(\frac{1}{7}, 0)$
9	↦	$(\frac{1}{9}, 0)$

- ▶ prolongement de la construction à l'infini : signal carré
- ▶ cas général : spectre d'amplitude et spectre de phase

○ Spectre d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoides

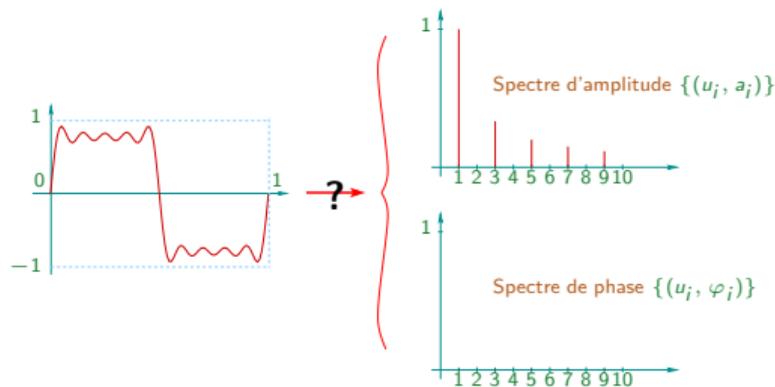


1	↦	$(1, 0)$
3	↦	$(\frac{1}{3}, 0)$
5	↦	$(\frac{1}{5}, 0)$
7	↦	$(\frac{1}{7}, 0)$
9	↦	$(\frac{1}{9}, 0)$



- ▶ prolongement de la construction à l'infini : signal carré
- ▶ cas général : spectre d'amplitude et spectre de phase

- ▶ retrouver les spectres d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoides $f(t)$



- ▶ calculable par la transformation de Fourier : $\mathcal{F}(f) = F$

- ▶ en 1D : $F(u) \rightarrow (a, \varphi)$

- ▶ spectre d'amplitude $A : u \rightarrow a$

- ▶ spectre de phase $H : u \rightarrow \varphi$

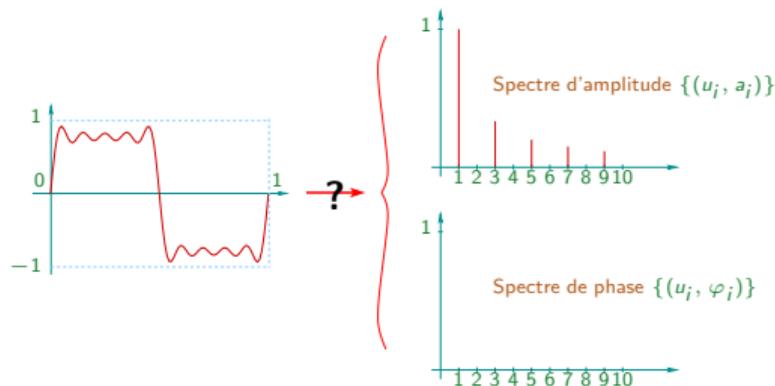
- ▶ en 2D : $F(u, v) \rightarrow (a, \varphi)$

- ▶ spectre d'amplitude $A : (u, v) \rightarrow a$

- ▶ spectre de phase $H : (u, v) \rightarrow \varphi$

- ▶ la transformation de Fourier est généralisable à toute fonction réelle intégrable

- ▶ retrouver les spectres d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoides $f(t)$



- ▶ calculable par la transformation de Fourier : $\mathcal{F}(f) = F$

- ▶ en 1D : $F(u) \rightarrow (a, \varphi)$

- ▶ spectre d'amplitude $A : u \rightarrow a$

- ▶ spectre de phase $H : u \rightarrow \varphi$

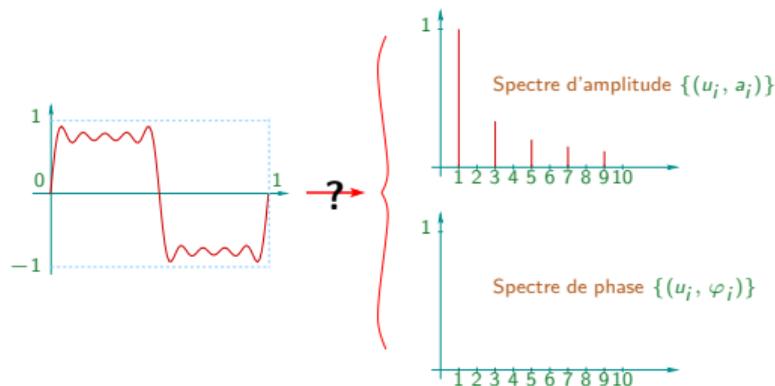
- ▶ en 2D : $F(u, v) \rightarrow (a, \varphi)$

- ▶ spectre d'amplitude $A : (u, v) \rightarrow a$

- ▶ spectre de phase $H : (u, v) \rightarrow \varphi$

- ▶ la transformation de Fourier est généralisable à toute fonction réelle intégrable

- ▶ retrouver les spectres d'amplitude et de phase d'une somme de sinusoides $f(t)$



- ▶ calculable par la transformation de Fourier : $\mathcal{F}(f) = F$

- ▶ en 1D : $F(u) \rightarrow (a, \varphi)$

- ▶ spectre d'amplitude $A : u \rightarrow a$

- ▶ spectre de phase $H : u \rightarrow \varphi$

- ▶ en 2D : $F(u, v) \rightarrow (a, \varphi)$

- ▶ spectre d'amplitude $A : (u, v) \rightarrow a$

- ▶ spectre de phase $H : (u, v) \rightarrow \varphi$

- ▶ la transformation de Fourier est généralisable à toute fonction réelle intégrable

3. Transformation de Fourier 1D

3.1. Développement en série de Fourier

1807 : Joseph Fourier affirme qu'une fonction périodique **arbitraire** peut s'écrire comme une **somme infinie de fonctions sinusoïdales**

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n u_0 t) + B_n \sin(2\pi n u_0 t)$$

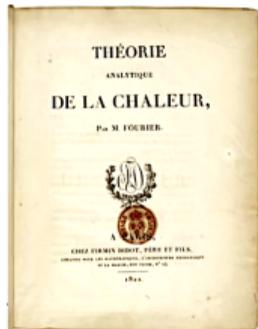
$$= \boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n u_0 t - \varphi_n)}$$

$$\text{avec } a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \text{ et } \tan(\varphi_n) = \frac{B_n}{A_n}$$



- ▶ près d'un siècle pour aboutir à une théorie finalisée qui révolutionne les mathématiques et la physique

*tout signal périodique physiquement réalisable s'écrit comme la somme d'une **porteuse** et de **fréquences harmoniques** multiples d'une **fréquence fondamentale** u_0*



3.2. Formulation complexe de la série de Fourier

La construction de la transformation de Fourier passe par la formulation complexe des formes trigonométriques.

▶ formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

▶ sommes d'exponentielles complexes :
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

▶ outil de réécriture de la trigonométrie, par exemple :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} + \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2}{-4} \\ &= \frac{(e^{i\theta^2} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2}) - (e^{i\theta^2} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2})}{4} \\ &= \frac{4e^{i\theta}e^{-i\theta}}{4} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

3.2. Formulation complexe de la série de Fourier

La construction de la transformation de Fourier passe par la formulation complexe des formes trigonométriques.

▶ formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

▶ sommes d'exponentielles complexes :
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

▶ outil de réécriture de la trigonométrie, par exemple :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} + \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2}{-4} \\ &= \frac{(e^{i\theta^2} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2}) - (e^{i\theta^2} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2})}{4} \\ &= \frac{4e^{i\theta}e^{-i\theta}}{4} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

3.2. Formulation complexe de la série de Fourier

La construction de la transformation de Fourier passe par la formulation complexe des formes trigonométriques.

▶ formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

▶ sommes d'exponentielles complexes :
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

▶ outil de réécriture de la trigonométrie, par exemple :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} + \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2}{-4} \\ &= \frac{(e^{i\theta^2} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2}) - (e^{i\theta^2} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2})}{4} \\ &= \frac{4e^{i\theta}e^{-i\theta}}{4} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

3.2. Formulation complexe de la série de Fourier

La construction de la transformation de Fourier passe par la formulation complexe des formes trigonométriques.

▶ formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

▶ sommes d'exponentielles complexes :
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

▶ outil de réécriture de la trigonométrie, par exemple :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} + \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2}{-4} \\ &= \frac{(e^{i\theta^2} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2}) - (e^{i\theta^2} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i\theta^2})}{4} \\ &= \frac{4e^{i\theta}e^{-i\theta}}{4} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

○ Série de Fourier à coefficients complexes

$$\begin{cases} f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n u_0 t - \varphi_n) \\ \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2} \left(e^{i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} + e^{-i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(e^{2i\pi n u_0 t} + e^{-2i\pi n u_0 t} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{2i\pi n u_0 t} \end{aligned}$$

- ▶ le coefficient c_n décrit les spectres d'amplitude et de phase de la fréquence $n u_0$
- ▶ « apparition » de fréquences négatives (redondance due à la représentation complexe)

○ Série de Fourier à coefficients complexes

$$\begin{cases} f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n u_0 t - \varphi_n) \\ \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2} \left(e^{i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} + e^{-i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(e^{2i\pi n u_0 t} + e^{-2i\pi n u_0 t} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{2i\pi n u_0 t} \end{aligned}$$

- ▶ le coefficient c_n décrit les spectres d'amplitude et de phase de la fréquence $n u_0$
- ▶ « apparition » de fréquences négatives (redondance due à la représentation complexe)

○ Série de Fourier à coefficients complexes

$$\begin{cases} f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n u_0 t - \varphi_n) \\ \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2} \left(e^{i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} + e^{-i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(e^{2i\pi n u_0 t} + e^{-2i\pi n u_0 t} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{2i\pi n u_0 t} \end{aligned}$$

- ▶ le coefficient c_n décrit les spectres d'amplitude et de phase de la fréquence $n u_0$
- ▶ « apparition » de fréquences négatives (redondance due à la représentation complexe)

○ Série de Fourier à coefficients complexes

$$\begin{cases} f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n u_0 t - \varphi_n) \\ \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2} \left(e^{i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} + e^{-i(2\pi n u_0 t - \varphi_n)} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(e^{2i\pi n u_0 t} + e^{-2i\pi n u_0 t} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{2i\pi n u_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t} \end{aligned}$$

- ▶ le coefficient c_n décrit les spectres d'amplitude et de phase de la fréquence $n u_0$
- ▶ « apparition » de fréquences négatives (redondance due à la représentation complexe)

3.3. Transformée de Fourier de $f(t)$

- ▶ le coefficients c_n décrit la contribution de la fréquence $u_n = nu_0$

$$u_n \mapsto \begin{cases} a_n & = |c_n| \\ \varphi_n & = \arg(c_n) \end{cases}$$

- ▶ on montre que la transformée de Fourier $F = \mathcal{F}(f)$ de la fonction f est définie par

$$c_n = F(nu_0) = u_0 \int_{-1/2u_0}^{1/2u_0} f(t) e^{-i2\pi nu_0 t} dt$$

- ▶ $F(u)$ fournit les spectres d'amplitude et de phase de $f(t)$

3.3. Transformée de Fourier de $f(t)$

- ▶ le coefficients c_n décrit la contribution de la fréquence $u_n = nu_0$

$$u_n \mapsto \begin{cases} a_n & = |c_n| \\ \varphi_n & = \arg(c_n) \end{cases}$$

- ▶ on montre que la transformée de Fourier $F = \mathcal{F}(f)$ de la fonction f est définie par

$$c_n = F(nu_0) = u_0 \int_{-1/2u_0}^{1/2u_0} f(t) e^{-i2\pi nu_0 t} dt$$

- ▶ $F(u)$ fournit les spectres d'amplitude et de phase de $f(t)$

3.4. Extension à des fonctions réelles quelconques

- ▶ comment généraliser à des fonctions non périodiques ?

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t}$$

- ▶ idée : on fait tendre la période T vers l'infini
 - ▶ $T \leftrightarrow \frac{1}{u_0}$: le pas de fréquence u_0 tend vers 0
 - ▶ ensemble continu de fréquences couvrant tout le spectre $[-\infty, +\infty]$
 - ▶ mathématiquement, on passe d'une somme discrète à une somme continue (intégrale)
- ▶ on peut montrer que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_u e^{2i\pi u t} du$$

avec

$$c_u = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi u x} dx$$

3.4. Extension à des fonctions réelles quelconques

- ▶ comment généraliser à des fonctions non périodiques ?

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t}$$

- ▶ idée : on fait tendre la période T vers l'infini
 - ▶ $T \leftrightarrow \frac{1}{u_0}$: le pas de fréquence u_0 tend vers 0
 - ▶ ensemble continu de fréquences couvrant tout le spectre $[-\infty, +\infty]$
 - ▶ mathématiquement, on passe d'une somme discrète à une somme continue (intégrale)
- ▶ on peut montrer que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_u e^{2i\pi u t} du$$

avec

$$c_u = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi u x} dx$$

★ Spectre d'amplitude d'une fonction réelle quelconque

La décomposition en somme de fréquences d'une fonction réelle non périodique $f(t)$ peut être obtenue au moyen de la formule :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_u e^{2i\pi ut} du$$

Le terme c_u est le coefficient de Fourier. Il indique l'amplitude et la phase de chaque fréquence contribuant à la reconstruction de $f(t)$.

	A	B	C	D
Une infinité de fréquence est généralement nécessaire pour reconstruire exactement $f(t)$.	oui	oui	non	non
Certaines de ces fréquences peuvent être négatives.	oui	non	oui	non

★ Spectre d'amplitude d'une fonction réelle quelconque

La décomposition en somme de fréquences d'une fonction réelle non périodique $f(t)$ peut être obtenue au moyen de la formule :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_u e^{2i\pi ut} du$$

Le terme c_u est le coefficient de Fourier. Il indique l'amplitude et la phase de chaque fréquence contribuant à la reconstruction de $f(t)$.

	A	B	C	D
Une infinité de fréquence est généralement nécessaire pour reconstruire exactement $f(t)$.	oui	oui	non	non
Certaines de ces fréquences peuvent être négatives.	oui	non	oui	non

★ Spectre d'amplitude d'une fonction réelle quelconque

La décomposition en somme de fréquences d'une fonction réelle non périodique $f(t)$ peut être obtenue au moyen de la formule :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_u e^{2i\pi ut} du$$

Le terme c_u est le coefficient de Fourier. Il indique l'amplitude et la phase de chaque fréquence contribuant à la reconstruction de $f(t)$.

	A	B	C	D
Une infinité de fréquence est généralement nécessaire pour reconstruire exactement $f(t)$.	oui	oui	non	non
Certaines de ces fréquences peuvent être négatives.	oui	non	oui	non

○ **Que signifie la présence des fréquences négatives ?**

- ▶ on a vu qu'elles proviennent de la réécriture sous forme complexe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n u_0 t - \varphi_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t}$$

- ▶ si la fonction f dont on calcule la transformée est une **fonction réelle**, les fréquences négatives n'apportent **pas d'informations supplémentaires**
- ▶ concrètement, le spectre est **symétrique** (redondant) :

$$F(u) = F(-u)$$

- ▶ exemples :

○ Que signifie la présence des fréquences négatives ?

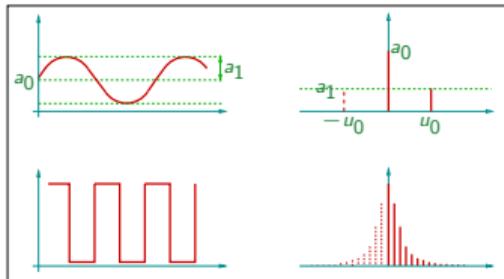
- ▶ on a vu qu'elles proviennent de la réécriture sous forme complexe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n u_0 t - \varphi_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n u_0 t}$$

- ▶ si la fonction f dont on calcule la transformée est une fonction réelle, les fréquences négatives n'apportent pas d'informations supplémentaires
- ▶ concrètement, le spectre est symétrique (redundant) :

$$F(u) = F(-u)$$

- ▶ exemples :



o La transformation de Fourier 1D en cinq points

- ▶ un outil fondamental (mais pas unique) pour le traitement du signal
- ▶ $F(u)$ fournit les spectres d'amplitude et de phase de $f(t)$

$$u \mapsto \left(|F(u)|, \arg(F(u)) \right)$$

- ▶ la transformation de Fourier est linéaire

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$$

- ▶ on peut construire la transformation inverse : $\mathcal{F}^{-1}(F) = f$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2i\pi ut} du$$

- ▶ permet d'effectuer des traitements dans le domaine fréquentiel

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u) \xrightarrow{\text{traitement fréquentiel}} F'(u) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f'(t)$$



attention à préserver la symétrie du spectre

o La transformation de Fourier 1D en cinq points

- ▶ un outil fondamental (mais pas unique) pour le traitement du signal
- ▶ $F(u)$ fournit les spectres d'amplitude et de phase de $f(t)$

$$u \mapsto \left(|F(u)|, \arg(F(u)) \right)$$

- ▶ la transformation de Fourier est linéaire

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$$

- ▶ on peut construire la transformation inverse : $\mathcal{F}^{-1}(F) = f$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2i\pi ut} du$$

- ▶ permet d'effectuer des traitements dans le domaine fréquentiel

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u) \xrightarrow{\text{traitement fréquentiel}} F'(u) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f'(t)$$



attention à préserver la symétrie du spectre

o La transformation de Fourier 1D en cinq points

- ▶ un outil fondamental (mais pas unique) pour le traitement du signal
- ▶ $F(u)$ fournit les spectres d'amplitude et de phase de $f(t)$

$$u \mapsto \left(|F(u)|, \arg(F(u)) \right)$$

- ▶ la transformation de Fourier est linéaire

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$$

- ▶ on peut construire la transformation inverse : $\mathcal{F}^{-1}(F) = f$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2i\pi ut} du$$

- ▶ permet d'effectuer des traitements dans le domaine fréquentiel

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u) \xrightarrow{\text{traitement fréquentiel}} F'(u) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f'(t)$$

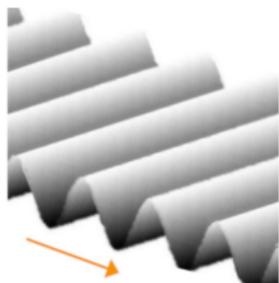


attention à préserver la symétrie du spectre

4. Extension aux images

4.1. Qu'est-ce qu'une fréquence 2D ?

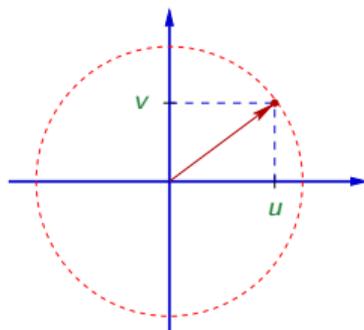
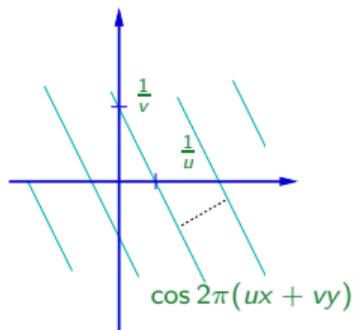
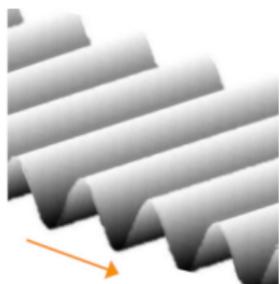
- ▶ fréquence directionnelle dans le plan
- ▶ oscillation dans la direction du vecteur (u, v)
- ▶ la valeur de la fréquence est la norme de (u, v)



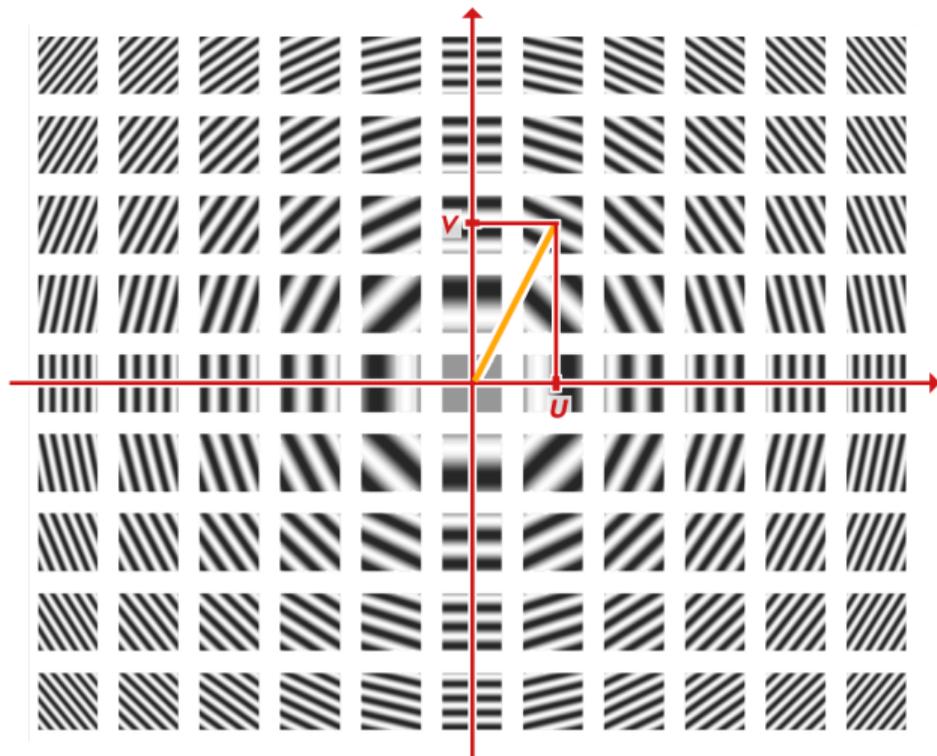
4. Extension aux images

4.1. Qu'est-ce qu'une fréquence 2D ?

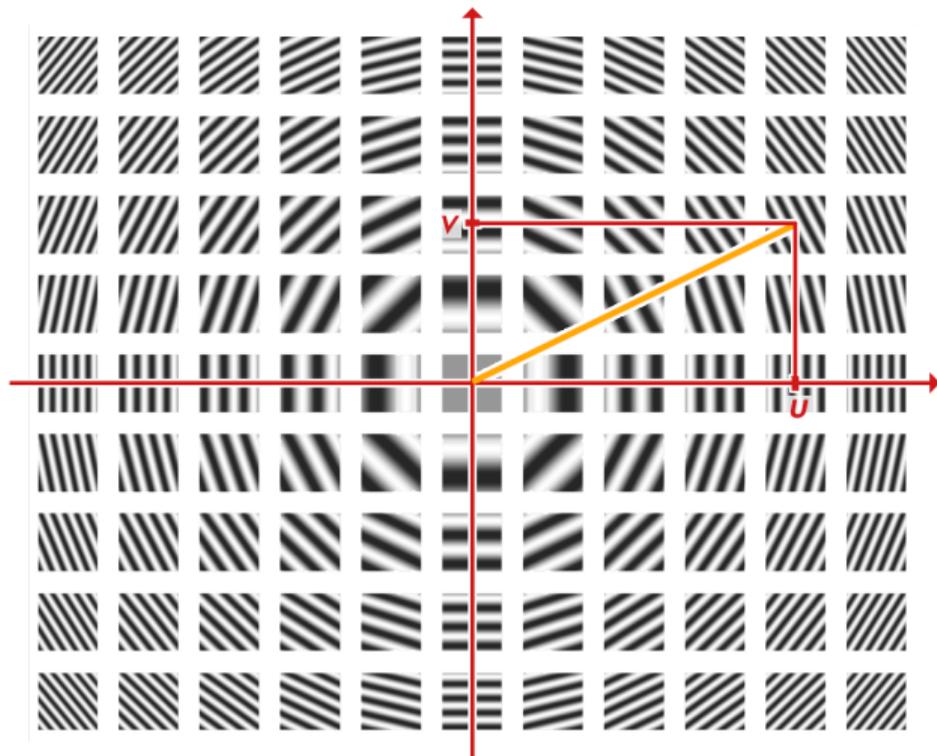
- ▶ fréquence directionnelle dans le plan
- ▶ oscillation dans la direction du vecteur (u, v)
- ▶ la valeur de la fréquence est la norme de (u, v)



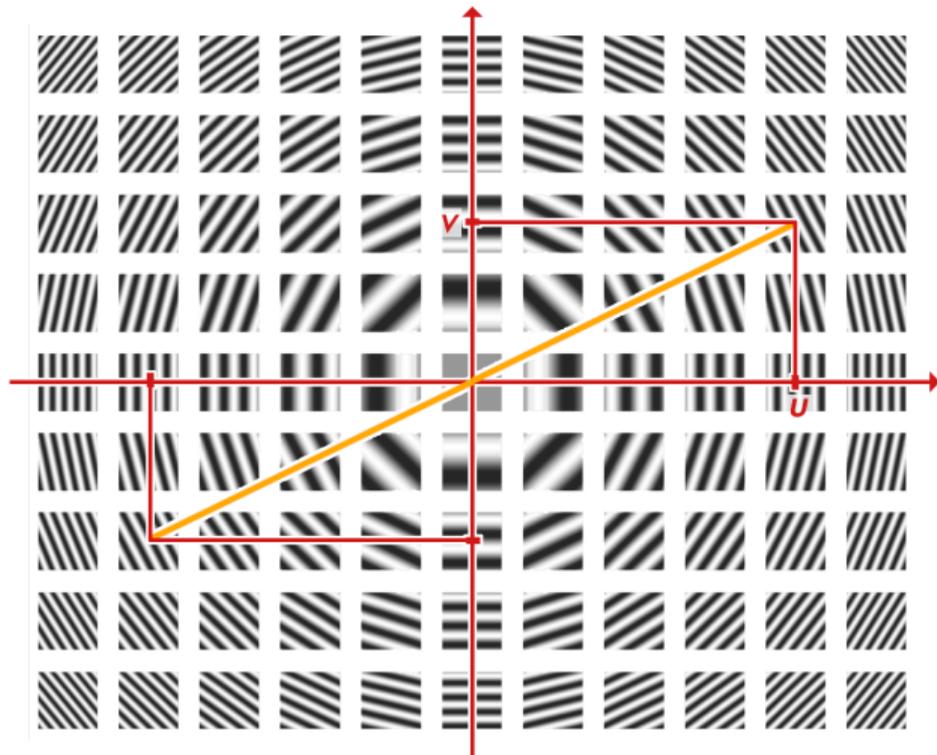
- ▶ ensemble des fréquences : base de l'espace de Fourier
- ▶ redondance (symétrie centrale)



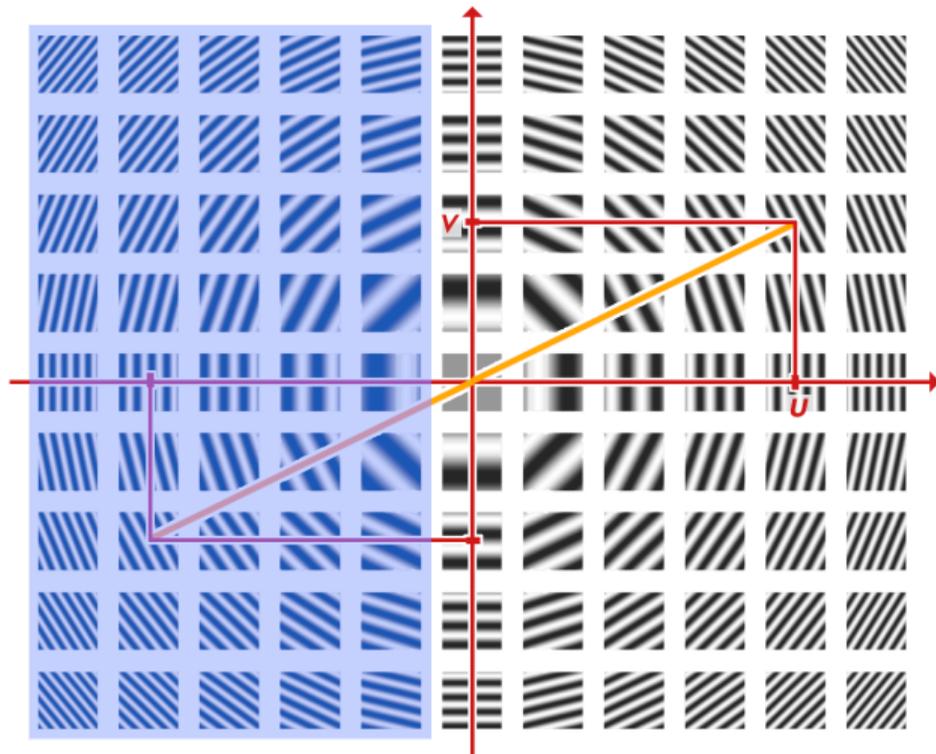
- ▶ ensemble des fréquences : base de l'espace de Fourier
- ▶ redondance (symétrie centrale)



- ▶ ensemble des fréquences : base de l'espace de Fourier
- ▶ redondance (symétrie centrale)



- ▶ ensemble des fréquences : **base** de l'espace de Fourier
- ▶ redondance (symétrie centrale)



4.2. Expression analytique de la transformée de Fourier 2D

- ▶ transformée **directe** :

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy$$

- ▶ transformée inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2i\pi ut} du$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2i\pi(ux+vy)} du dv$$

- ▶ image multicanal (e.g. RGB) : représentation fréquentielle canal par canal

4.2. Expression analytique de la transformée de Fourier 2D

- ▶ transformée directe :

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy$$

- ▶ transformée inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2i\pi ut} du$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2i\pi(ux+vy)} du dv$$

- ▶ image multicanal (e.g. RGB) : représentation fréquentielle canal par canal

4.2. Expression analytique de la transformée de Fourier 2D

- ▶ transformée directe :

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy$$

- ▶ transformée inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2i\pi ut} du$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2i\pi(ux+vy)} du dv$$

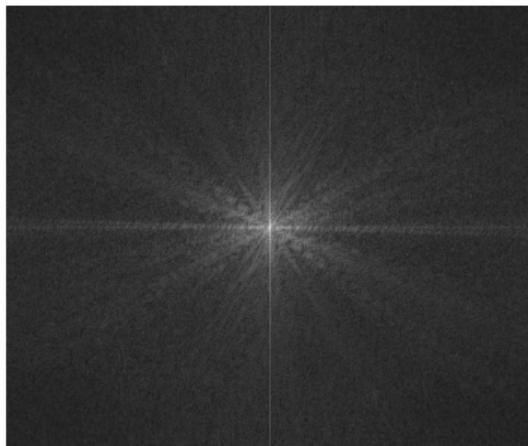
- ▶ image **multicanal** (e.g. RGB) : représentation fréquentielle canal par canal

4.3. Représentation du spectre d'amplitude

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : I(x, y) &\longrightarrow F(u, v) \\ \mathcal{A} : (u, v) &\longrightarrow |F(u, v)|\end{aligned}$$



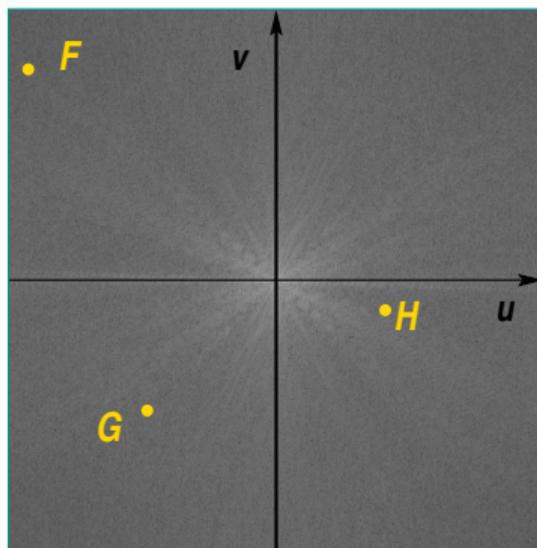
$I(x, y)$



spectre d'amplitude de $F(u, v)$

- ▶ chaque point (u, v) du spectre d'amplitude définit la contribution en amplitude de la fréquence directionnelle (u, v) dans l'image I
- ▶ visualisation en niveaux de gris : $[0, a_{max}] \longrightarrow [0, 255]$

★ Comparaison de fréquences 2D

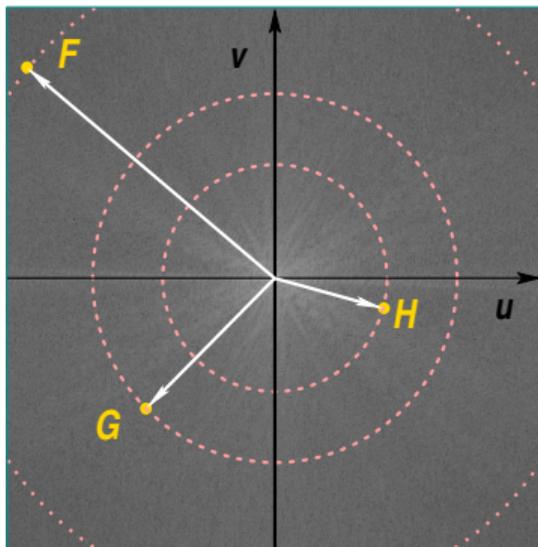


Classez ces trois fréquences de la plus basse à la plus élevée.

Cette figure représente trois fréquences, notées F , G et H , positionnées sur le spectre d'amplitude de la transformée de Fourier d'une image 2D.

A	$F < G < H$
B	$F < H < G$
C	$H < G < F$
D	$G < H < F$

★ Comparaison de fréquences 2D



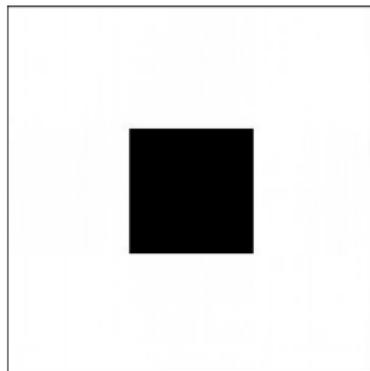
Classez ces trois fréquences de la plus basse à la plus élevée.

Cette figure représente trois fréquences, notées F , G et H , positionnées sur le spectre d'amplitude de la transformée de Fourier d'une image 2D.

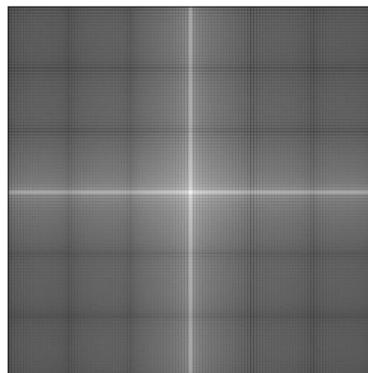
A	$F < G < H$
B	$F < H < G$
C	$H < G < F$
D	$G < H < F$

4.4. Quelques exemples de représentation fréquentielle d'images 2D

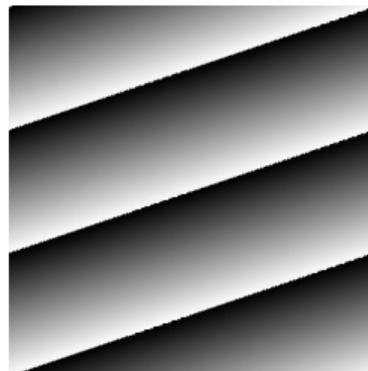
- Exemple 1 : signal « carré »



I

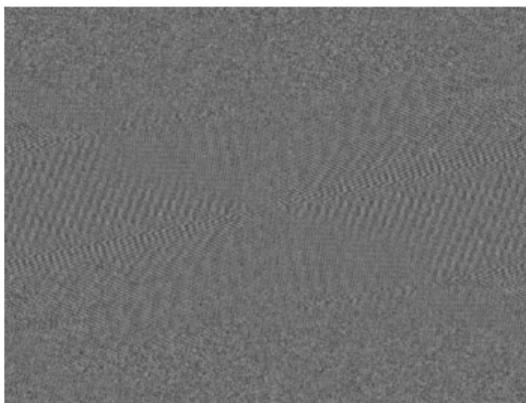
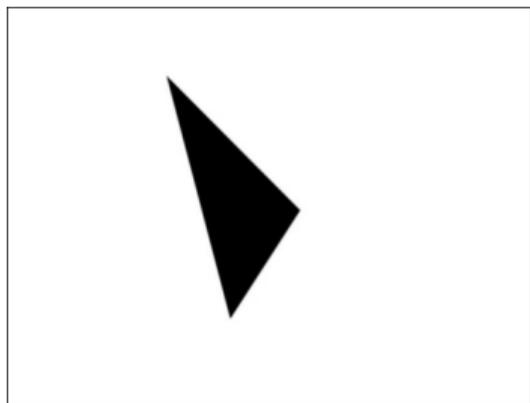


$A(\mathcal{F}(I))$



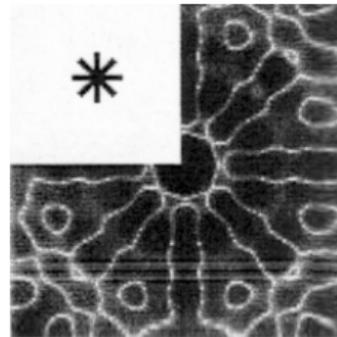
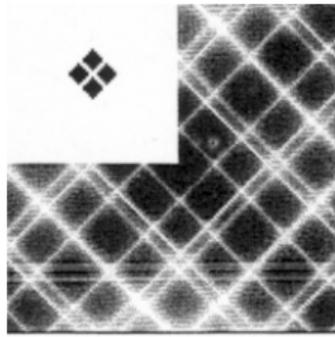
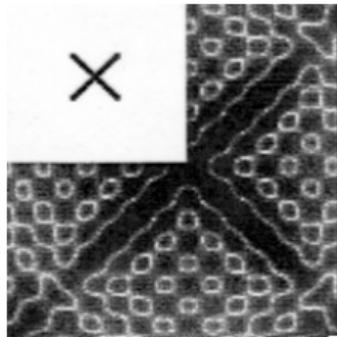
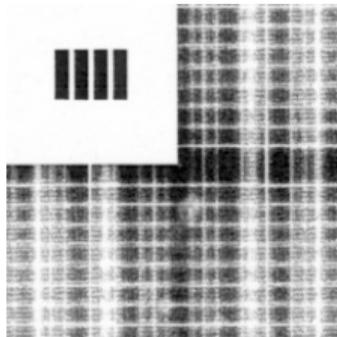
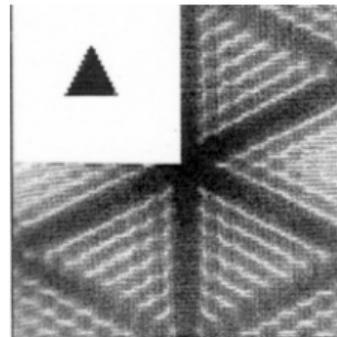
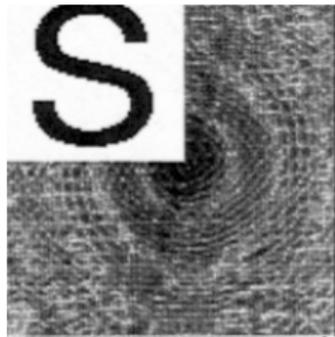
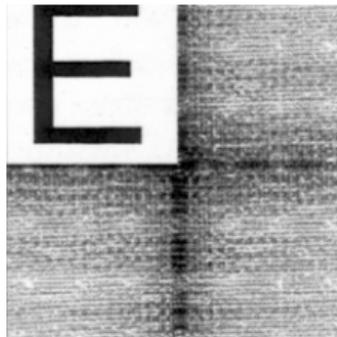
$H(\mathcal{F}(I))$

○ Exemple 2 : fréquences directionnelles dominantes

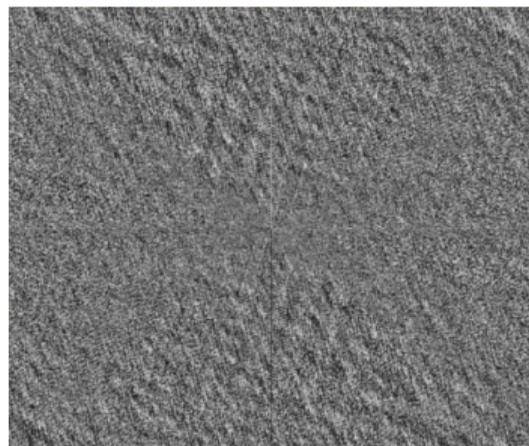
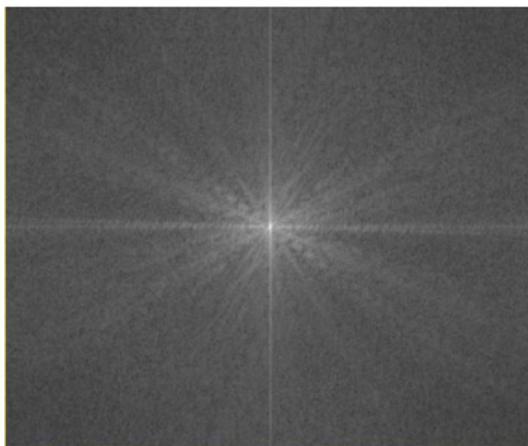


On retrouve sur le spectre d'amplitude des fréquences privilégiées dans les trois directions orthogonales aux cotés du triangle (sommées de fréquences nécessaires pour reconstruire la transition brusque — signal carré)

○ Exemple 3 : spectres d'amplitude de formes caractéristiques

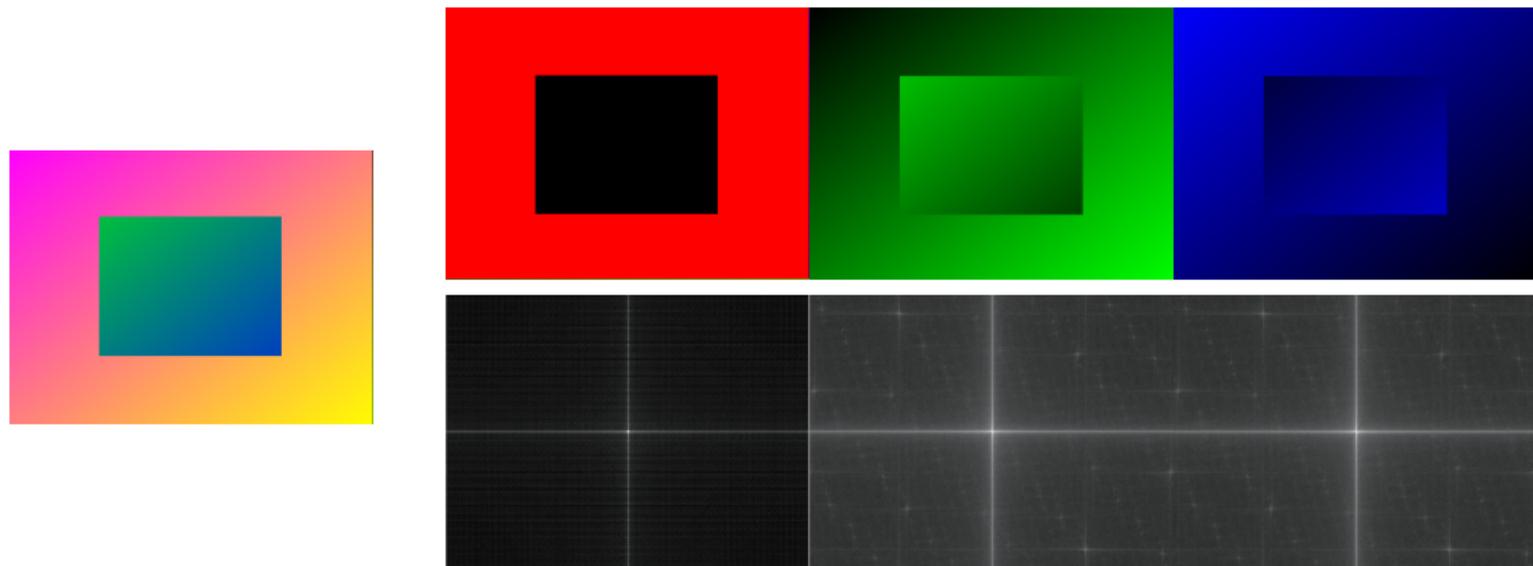


○ Exemple 4 : transformée de Fourier d'une image (monochrome) réelle



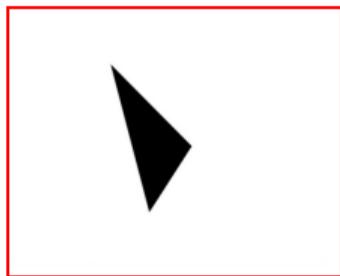
- ▶ on retrouve dans le spectre d'amplitude les directions privilégiées de l'image (horizon, mâts et pales des éoliennes)
- ▶ en imagerie optique, les informations portées par le spectre de phase ne sont pas exploitables de manière intuitive

○ Exemple 5 : spectres d'amplitude d'une image RGB

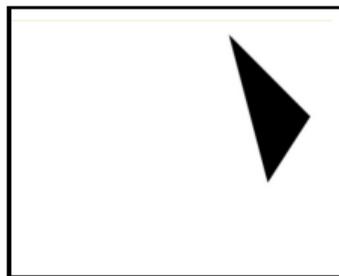


- ▶ on retrouve pour le canal rouge le spectre de l'image précédente
- ▶ les spectres des canaux vert et bleu sont similaires (ils expriment des variations identiques à un déphasage près)

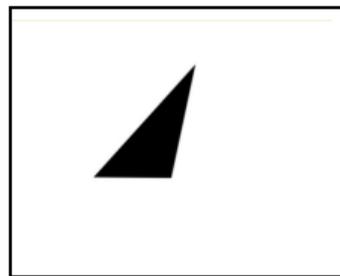
★ Associer à chaque image son spectre d'amplitude



F



G



H



1



2



3

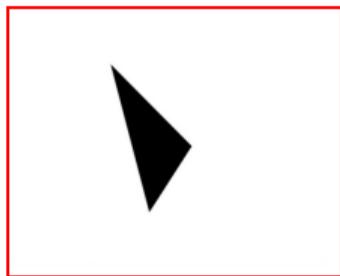
A

G	2
H	3

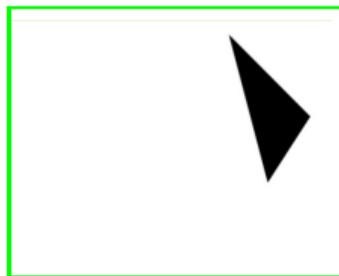
B

G	3
H	2

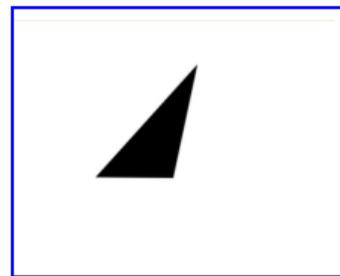
★ Associer à chaque image son spectre d'amplitude



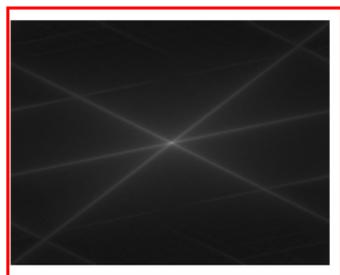
F



G



H



1



2



3

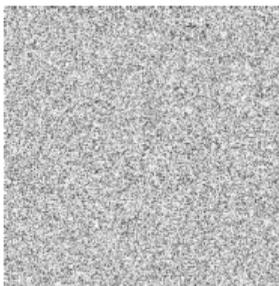
A

G	2
H	3

B

G	3
H	2

★ Associer à chaque image son spectre d'amplitude



F



G



H

Image I on considère l'ensemble $C_v(I)$ de pixels de I

pour pixel $P_{i,j} \in I$ calculer les quantités

$$\frac{I_{i,j} - P_{i-1,j} + 2I_{i,j} - 2P_{i-1,j} + P_{i-2,j} - P_{i-1,j} + I_{i,j} - P_{i,j} + P_{i,j+1} + 2P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1} - P_{i,j-2} + I_{i,j} + G_{i,j}^2}{8}$$

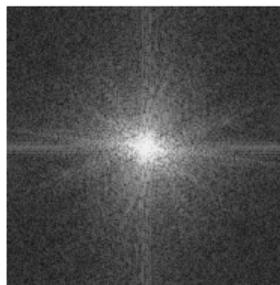
ajouter $P_{i,j}$ à l'ensemble $C_v(I)$

répéter les points de l'ensemble $C_v(I)$ et quel est l'ensemble des points $C_v(I)$ pour l'image I de la donnée une image, on note $H(i)$ le nombre de pixels de l'image d'intensité i de l'image restreinte au domaine qui appartient aussi à l'ensemble de points de l'image monochrome I dont les intensités sont comprises entre i et $i+1$ par :

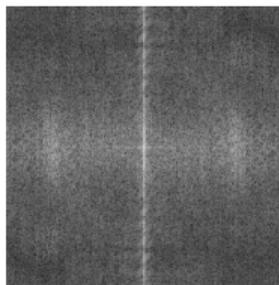
I



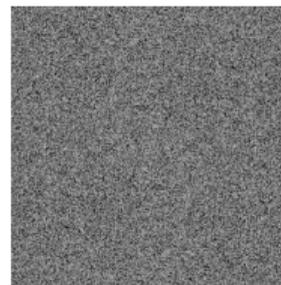
1



2



3



4



F	4
G	1
H	2
I	3

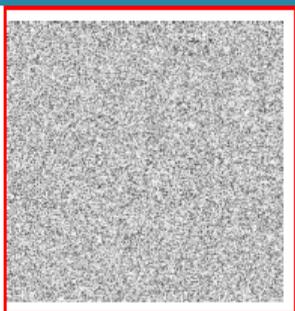


F	2
G	1
H	3
I	4

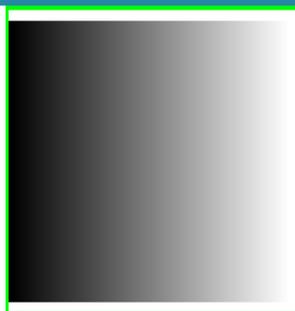


F	4
G	3
H	2
I	1

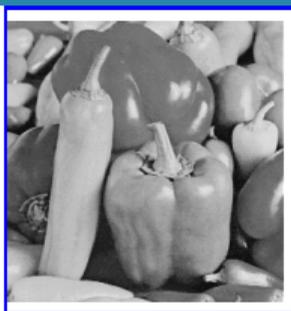
★ Associer à chaque image son spectre d'amplitude



F



G



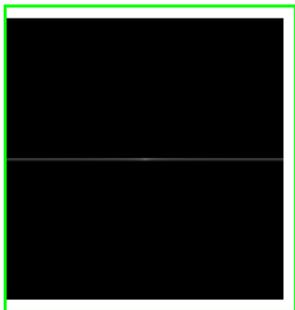
H

Image I on considère l'ensemble $C_v(I)$ de pixels de I
 : pixel $P_{i,j} \in I$ calculer les quantités

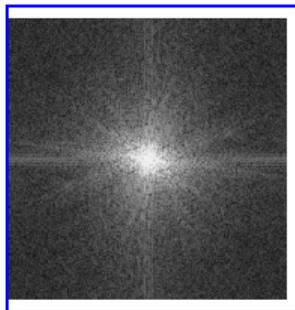
$$\frac{P_{i,j} - P_{i,j-1} + 2P_{i,j} - 2P_{i,j-1} + P_{i,j+1} - P_{i,j+1}}{4} + G_v^2$$

 rajouter $P_{i,j}$ à l'ensemble $C_v(I)$
 correspondent les points de l'ensemble $C_v(I)$ et quel es
 e l'ensemble des points $C_v(I)$ pour l'image I de la
 onnée une image, on note $H(i)$ le nombre de pixels
 le pixel d'intensité i de l'image restreinte au doma
 age qui appartiennent aussi à l'ensemble de points
 age monochrome I dont les intensités sont comp
 ion d'intensité $T_{v,j}(i)$ par :

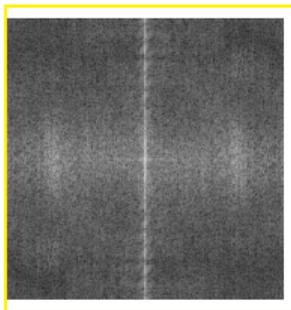
I



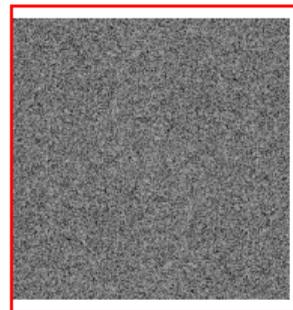
1



2



3



4

A

F	4
G	1
H	2
I	3

B

F	2
G	1
H	3
I	4

C

F	4
G	3
H	2
I	1

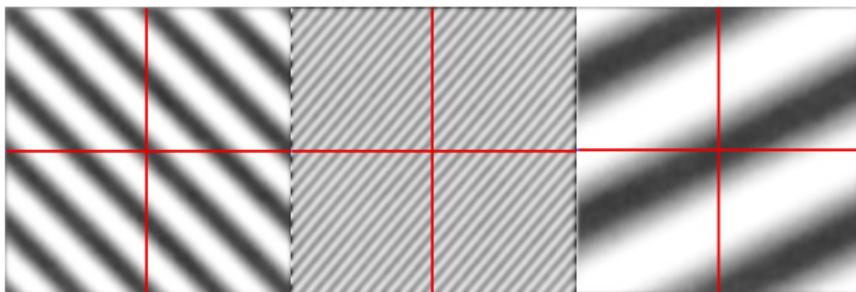
4.5. Illustration de la linéarité de la transformation de Fourier

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$$

I



$$\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3$$



l_1

l_2

l_3

$\mathcal{F}(I)$

$$\alpha_1 \mathcal{F}(l_1) + \alpha_2 \mathcal{F}(l_2) + \alpha_3 \mathcal{F}(l_3)$$

$$\mathcal{F}(l_1)$$

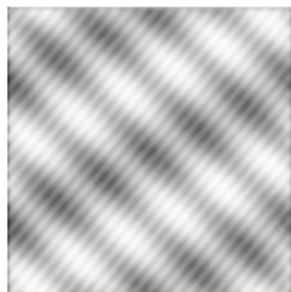
$$\mathcal{F}(l_2)$$

$$\mathcal{F}(l_3)$$

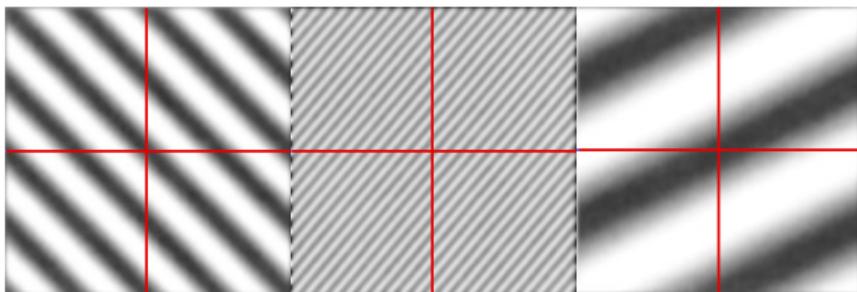
4.5. Illustration de la linéarité de la transformation de Fourier

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$$

I



$$\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3$$

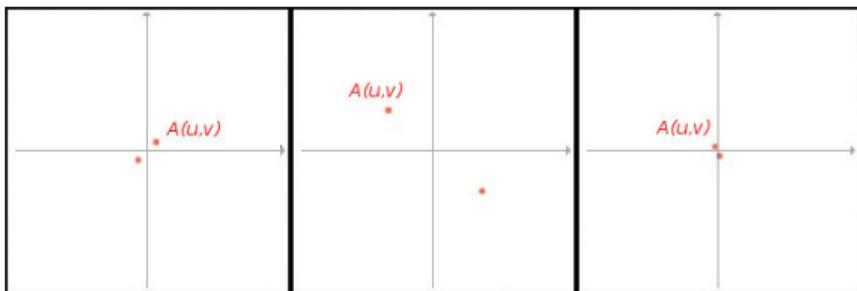


I_1

I_2

I_3

$\mathcal{F}(I)$



$$\alpha_1 \mathcal{F}(I_1) + \alpha_2 \mathcal{F}(I_2) + \alpha_3 \mathcal{F}(I_3)$$

$\mathcal{F}(I_1)$

$\mathcal{F}(I_2)$

$\mathcal{F}(I_3)$

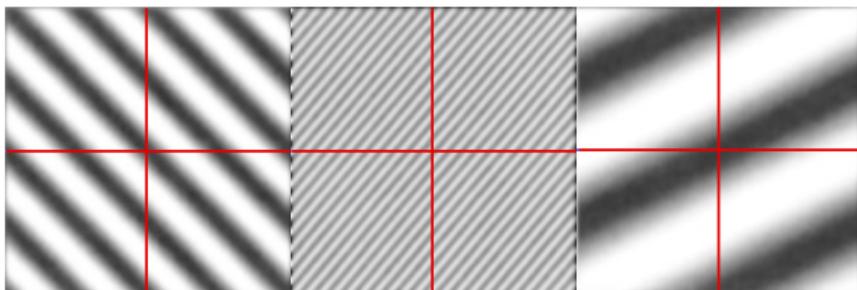
4.5. Illustration de la linéarité de la transformation de Fourier

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$$

I



$$\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3$$

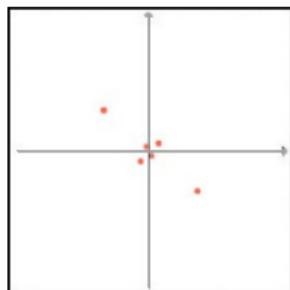


I_1

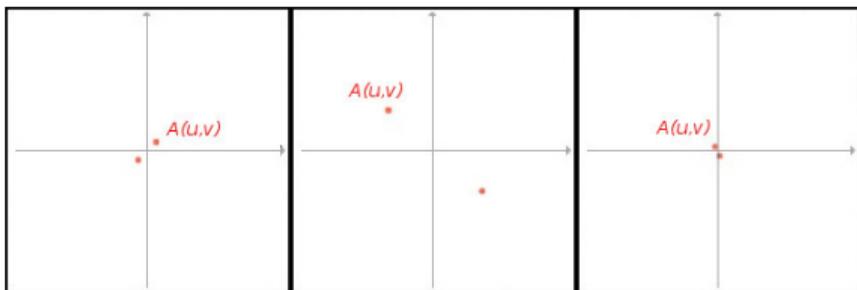
I_2

I_3

$\mathcal{F}(I)$



$$\alpha_1 \mathcal{F}(I_1) + \alpha_2 \mathcal{F}(I_2) + \alpha_3 \mathcal{F}(I_3)$$



$\mathcal{F}(I_1)$

$\mathcal{F}(I_2)$

$\mathcal{F}(I_3)$

5. Transformée de Fourier d'une image discrète

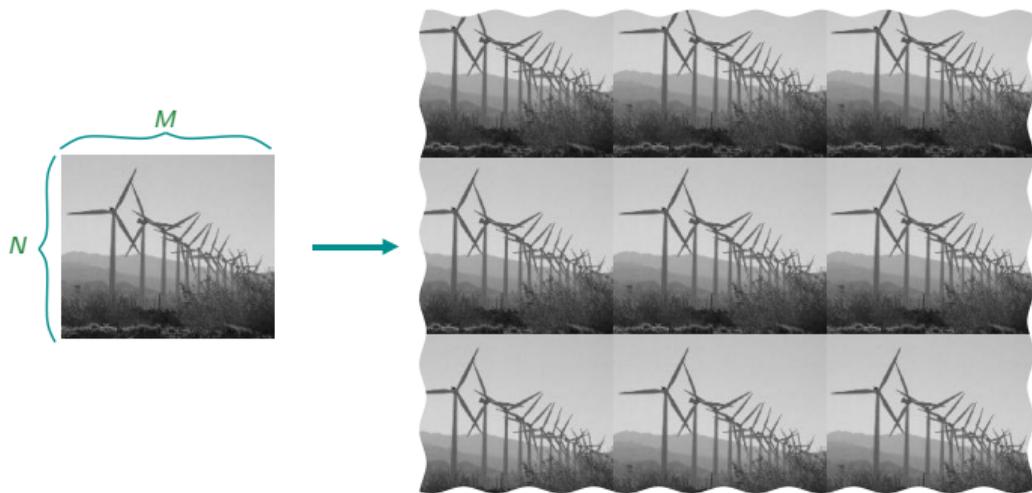
5.1. Formulation discrète de la transformation de Fourier

- ▶ images discrètes de taille $M \times N$
 - ▶ domaine **borné**
 - ▶ nombre **fini** de pixel
- ▶ **périodisation** de l'image : prolongement par réplication dans les deux directions

5. Transformée de Fourier d'une image discrète

5.1. Formulation discrète de la transformation de Fourier

- ▶ images discrètes de taille $M \times N$
 - ▶ domaine **borné**
 - ▶ nombre **fini** de pixel
- ▶ **périodisation** de l'image : prolongement par réplication dans les deux directions



5. Transformée de Fourier d'une image discrète

5.1. Formulation discrète de la transformation de Fourier

- ▶ images discrètes de taille $M \times N$
 - ▶ domaine **borné**
 - ▶ nombre **fini** de pixel
- ▶ **périodisation** de l'image : prolongement par réplication dans les deux directions
- ▶ **échantillonnage** de la transformée de cette image ($M \times N$ échantillons) par sommation sur une période

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2i\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

- ▶ $F(u, v)$ est également une **fonction périodique**, de période (M, N)

5. Transformée de Fourier d'une image discrète

5.1. Formulation discrète de la transformation de Fourier

- ▶ images discrètes de taille $M \times N$
 - ▶ domaine **borné**
 - ▶ nombre **fini** de pixel
- ▶ **périodisation** de l'image : prolongement par réplication dans les deux directions
- ▶ **échantillonnage** de la transformée de cette image ($M \times N$ échantillons) par sommation sur une période

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

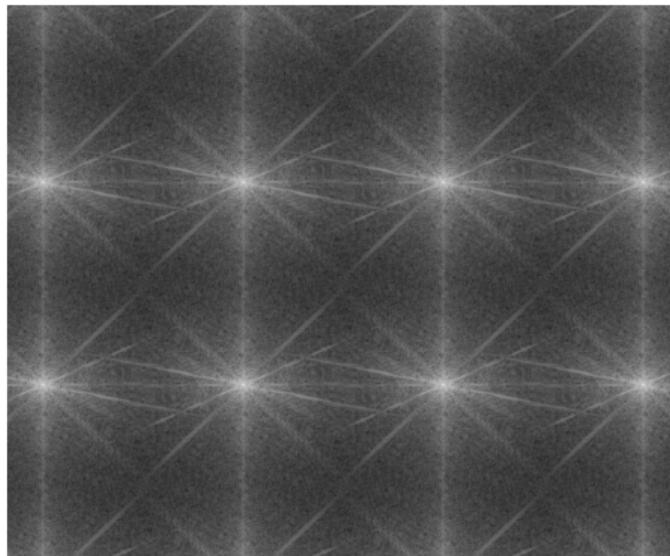
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2i\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

- ▶ $F(u, v)$ est également une **fonction périodique**, de période (M, N)

○ Illustration du phénomène de repliement du spectre



la périodisation de l'image...



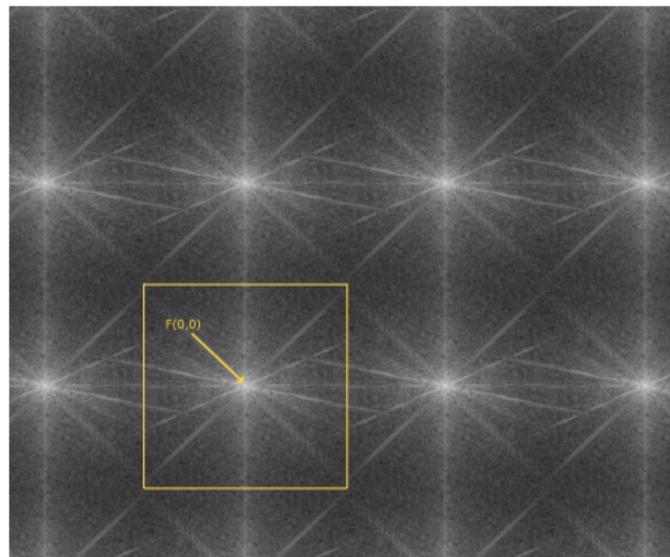
... produit une périodisation des spectres de Fourier

▶ par commodité, on retient une période centrée en $(0,0)$ — modulo (M, N)

○ Illustration du phénomène de repliement du spectre



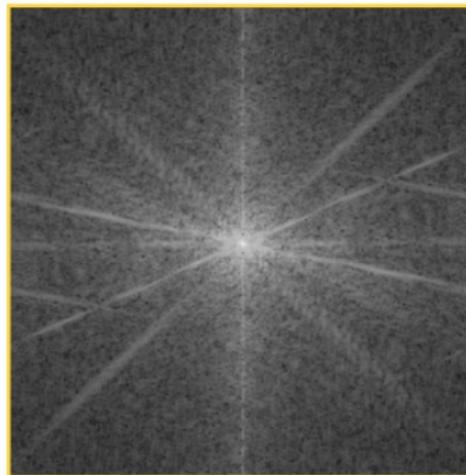
la périodisation de l'image...



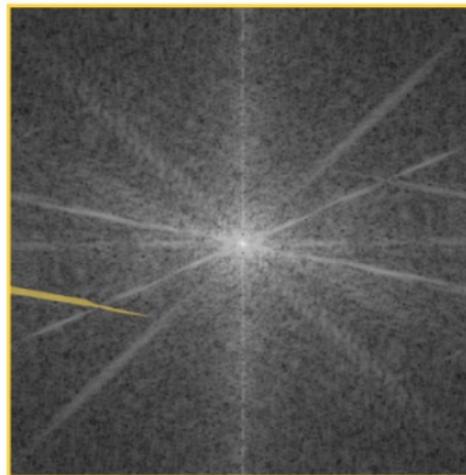
... produit une périodisation des spectres de Fourier

- ▶ par commodité, on retient une période centrée en $(0,0)$ — modulo (M, N)

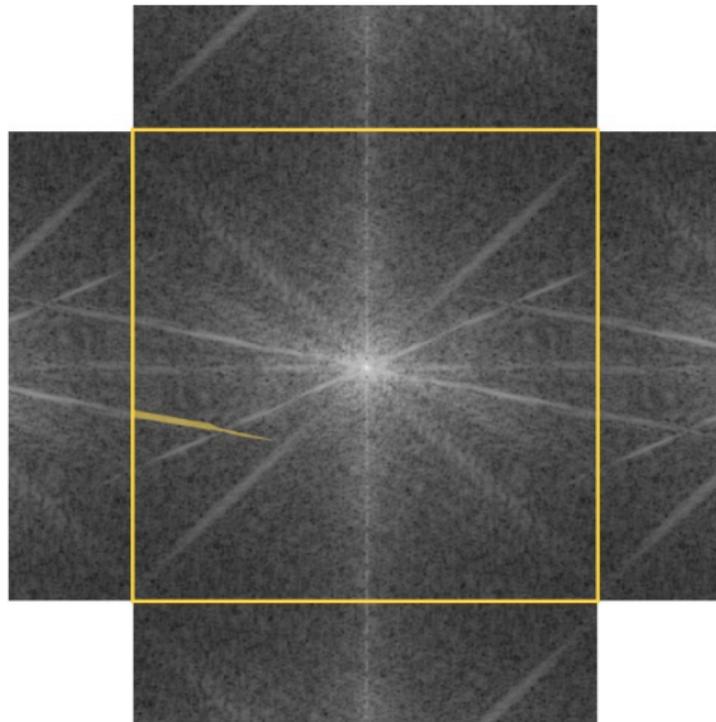
- ▶ le repliement du spectre permet de comprendre la présence de fréquence qui peuvent apparaitre comme des anomalies



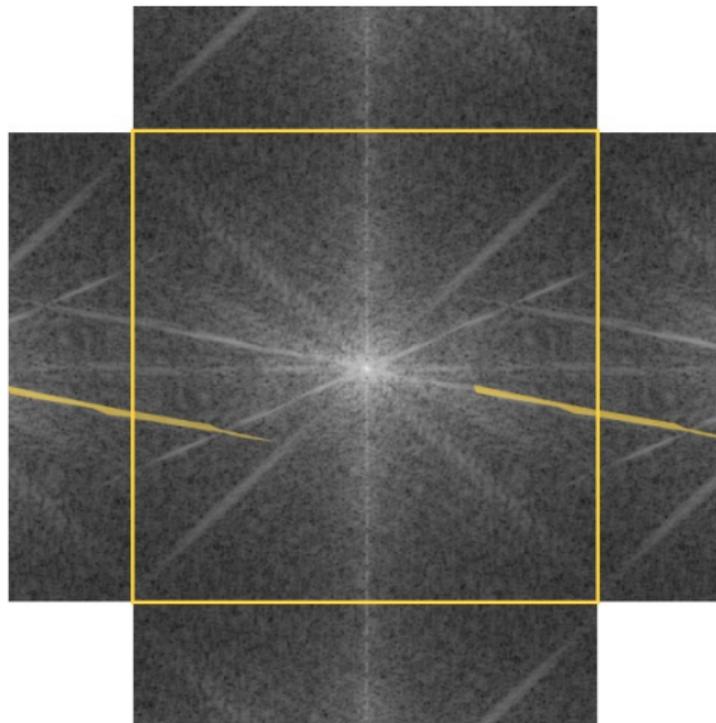
- ▶ le repliement du spectre permet de comprendre la présence de fréquence qui peuvent apparaître comme des anomalies



- ▶ le repliement du spectre permet de comprendre la présence de fréquence qui peuvent apparaitre comme des anomalies

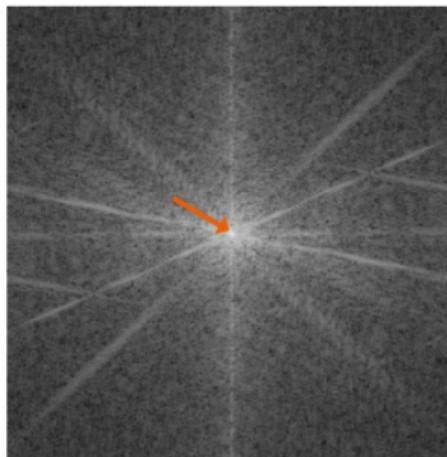
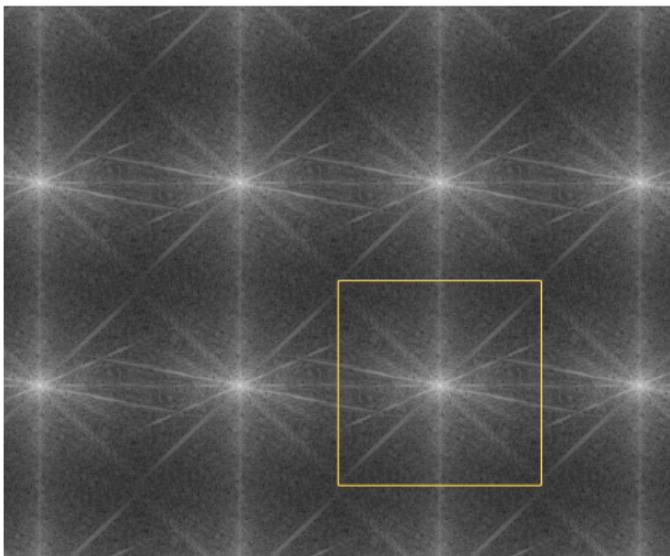


- ▶ le repliement du spectre permet de comprendre la présence de fréquence qui peuvent apparaitre comme des anomalies



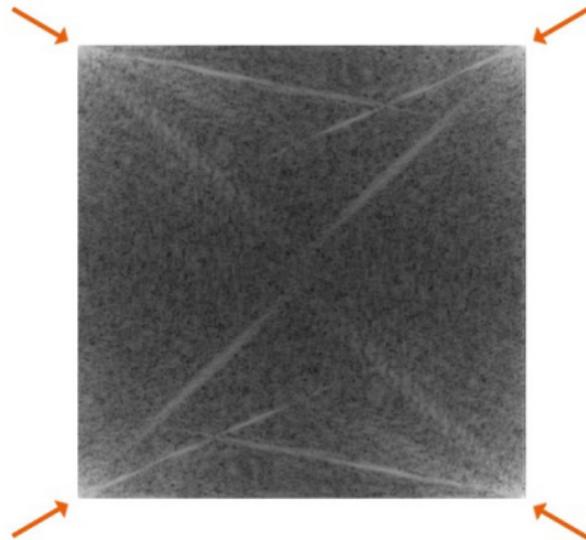
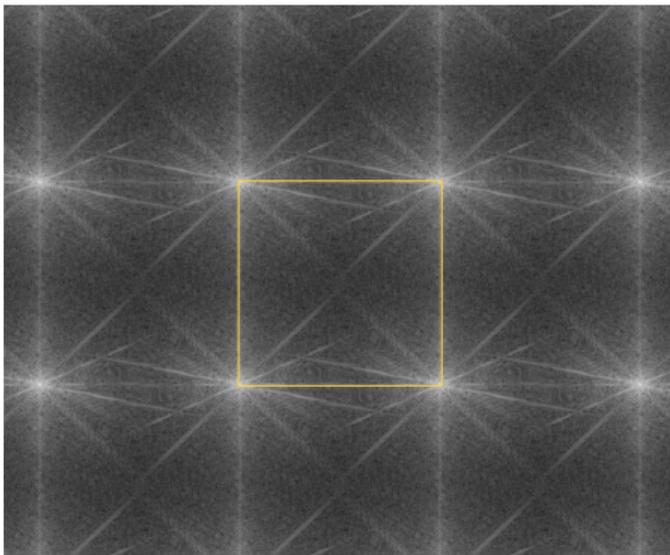
5.2. Recentrage des spectres

- ▶ représentation usuelle du spectre d'amplitude : origine $F(0,0)$ au centre de l'image
- ▶ la TDFD positionne la fréquence nulle aux coins de l'image
- ▶ nécessité d'effectuer un recentrage : translation de $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$



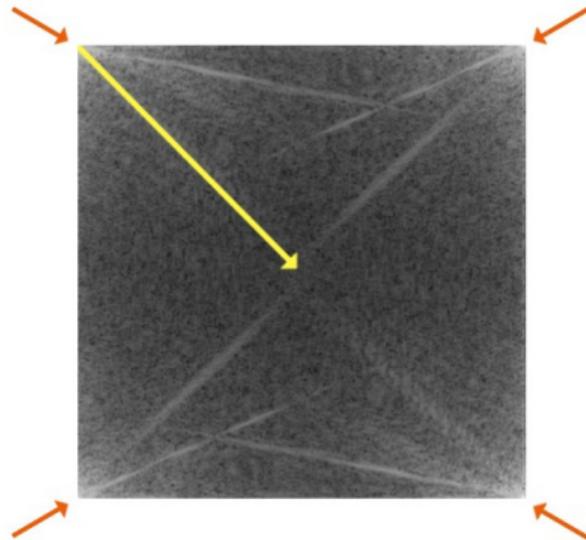
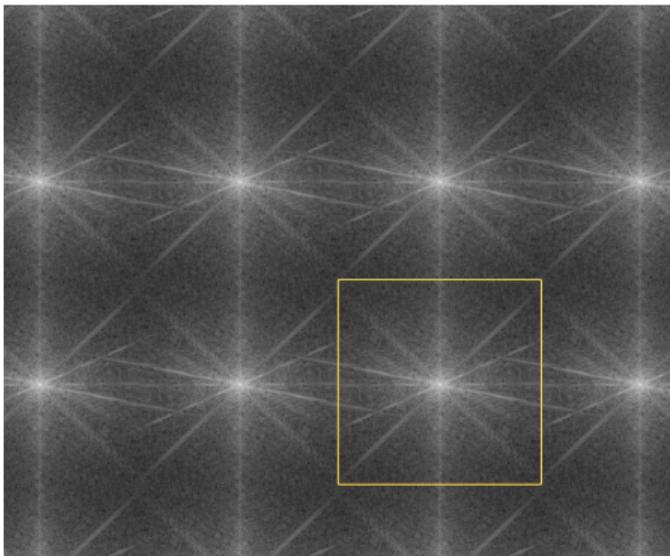
5.2. Recentrage des spectres

- ▶ représentation usuelle du spectre d'amplitude : origine $F(0,0)$ au centre de l'image
- ▶ la TDFD positionne la fréquence nulle aux coins de l'image
- ▶ nécessité d'effectuer un recentrage : translation de $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$



5.2. Recentrage des spectres

- ▶ représentation usuelle du spectre d'amplitude : origine $F(0,0)$ au centre de l'image
- ▶ la TDFD positionne la fréquence nulle aux coins de l'image
- ▶ nécessité d'effectuer un recentrage : translation de $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$



○ Mise en œuvre du recentrage des spectres

$$\begin{aligned} F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\frac{(u-\frac{M}{2})x}{M} + \frac{(v-\frac{N}{2})y}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\left(\frac{u}{M} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{v}{N} - \frac{1}{2}\right)y\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(-\frac{1}{2}(x+y) + \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y) - 2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y)} e^{-2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \mathcal{F}\left(f(x, y) e^{i\pi(x+y)}\right) \end{aligned}$$

○ Mise en œuvre du recentrage des spectres

$$\begin{aligned} F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\frac{(u - \frac{M}{2})x}{M} + \frac{(v - \frac{N}{2})y}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\left(\frac{u}{M} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{v}{N} - \frac{1}{2}\right)y\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(-\frac{1}{2}(x+y) + \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y) - 2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y)} e^{-2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \mathcal{F}\left(f(x, y) e^{i\pi(x+y)}\right) \end{aligned}$$

○ Mise en œuvre du recentrage des spectres

$$\begin{aligned} F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\frac{(u-\frac{M}{2})x}{M} + \frac{(v-\frac{N}{2})y}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\left(\frac{u}{M} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{v}{N} - \frac{1}{2}\right)y\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(-\frac{1}{2}(x+y) + \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y) - 2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y)} e^{-2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \mathcal{F}\left(f(x, y) e^{i\pi(x+y)}\right) \end{aligned}$$

○ Mise en œuvre du recentrage des spectres

$$\begin{aligned}
 F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\frac{(u-\frac{M}{2})x}{M} + \frac{(v-\frac{N}{2})y}{N}\right)} \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\left(\frac{u}{M} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{v}{N} - \frac{1}{2}\right)y\right)} \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(-\frac{1}{2}(x+y) + \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)} \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y) - 2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\
 &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y)} e^{-2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\
 &= \mathcal{F}\left(f(x, y) e^{i\pi(x+y)}\right)
 \end{aligned}$$

○ Mise en œuvre du recentrage des spectres

$$\begin{aligned} F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\frac{(u-\frac{M}{2})x}{M} + \frac{(v-\frac{N}{2})y}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\left(\frac{u}{M} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{v}{N} - \frac{1}{2}\right)y\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(-\frac{1}{2}(x+y) + \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y) - 2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y)} e^{-2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \mathcal{F}\left(f(x, y) e^{i\pi(x+y)}\right) \end{aligned}$$

○ Mise en œuvre du recentrage des spectres

$$\begin{aligned} F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\frac{(u-\frac{M}{2})x}{M} + \frac{(v-\frac{N}{2})y}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\left(\frac{u}{M} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{v}{N} - \frac{1}{2}\right)y\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(-\frac{1}{2}(x+y) + \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y) - 2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y)} e^{-2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \mathcal{F}\left(f(x, y) e^{i\pi(x+y)}\right) \end{aligned}$$

○ Mise en œuvre du recentrage des spectres

$$\begin{aligned} F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\frac{(u-\frac{M}{2})x}{M} + \frac{(v-\frac{N}{2})y}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(\left(\frac{u}{M} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{v}{N} - \frac{1}{2}\right)y\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi\left(-\frac{1}{2}(x+y) + \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y) - 2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{i\pi(x+y)} e^{-2i\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \mathcal{F}\left(f(x, y) e^{i\pi(x+y)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{i\pi(x+y)} &= e^{i\pi(x+y)} \\
 &= (\cos\pi + i \sin \pi)^{(x+y)} \\
 &= (-1)^{(x+y)}
 \end{aligned}$$

$$F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) = \mathcal{F}\left((-1)^{(x+y)}f(x, y)\right)$$

- recentrage du spectre de la TDFD de $f(x, y)$: pré-multiplication de $f(x, y)$ par $(-1)^{x+y}$

$$(-1)^{x+y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 e^{i\pi(x+y)} &= e^{i\pi(x+y)} \\
 &= (\cos\pi + i \sin\pi)^{(x+y)} \\
 &= (-1)^{(x+y)}
 \end{aligned}$$

$$F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) = \mathcal{F}\left((-1)^{(x+y)}f(x, y)\right)$$

- recentrage du spectre de la TDFD de $f(x, y)$: pré-multiplication de $f(x, y)$ par $(-1)^{x+y}$

$$(-1)^{x+y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

5.3. Visualisation du spectre d'amplitude : $A(u, v) = |F(u, v)|$

- ▶ **dynamique** du spectre trop grande pour être visualisée sur 256 niveaux de gris
- ▶ **correction non linéaire** des valeurs du spectre avant échantillonnage en niveaux de gris, par exemple :

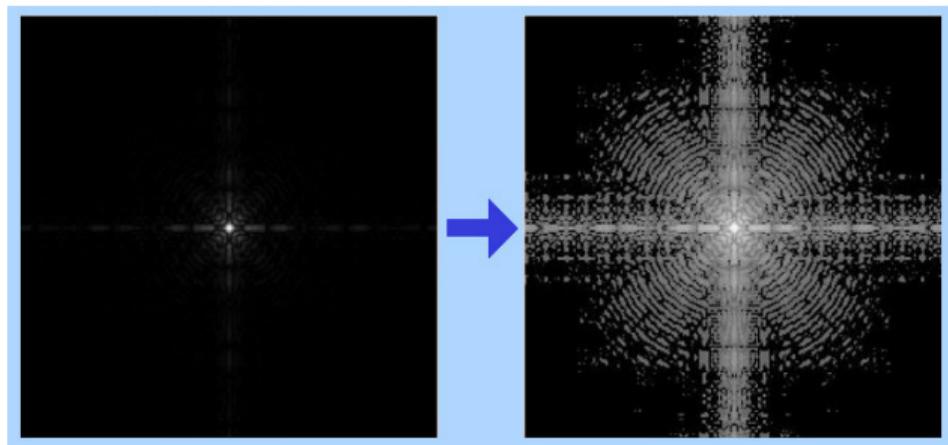
$$A'(u, v) = \left(\frac{A(u, v)}{A_{max}(u, v)} \right)^k \times 255 \quad (\text{on peut prendre } k \sim 0.1)$$



5.3. Visualisation du spectre d'amplitude : $A(u, v) = |F(u, v)|$

- ▶ **dynamique** du spectre trop grande pour être visualisée sur 256 niveaux de gris
- ▶ **correction non linéaire** des valeurs du spectre avant échantillonnage en niveaux de gris, par exemple :

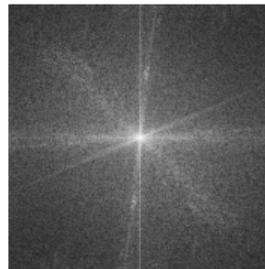
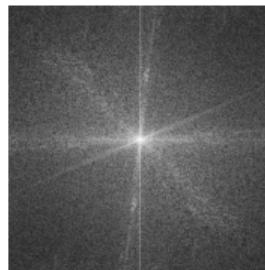
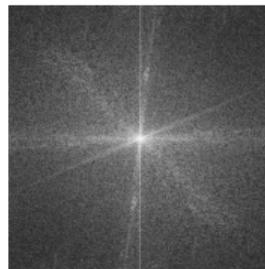
$$A'(u, v) = \left(\frac{A(u, v)}{A_{max}(u, v)} \right)^k \times 255 \quad (\text{on peut prendre } k \sim 0.1)$$



★ Spectre d'amplitude d'une image



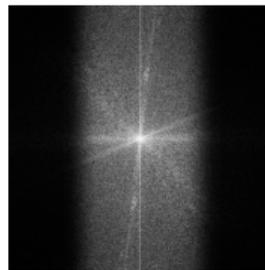
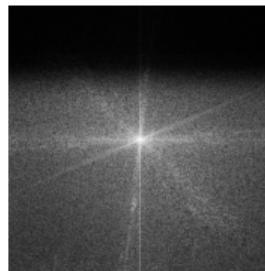
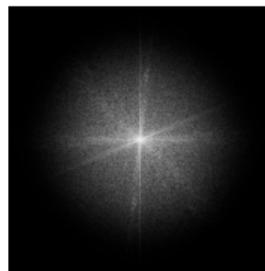
Quel est le spectre d'amplitude le plus probable pour l'image I' résultant d'un traitement fréquentiel de l'image I ?



★ Spectre d'amplitude d'une image



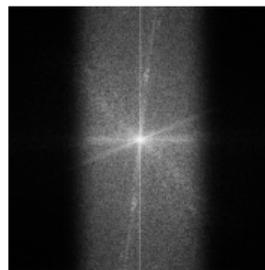
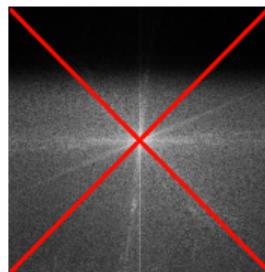
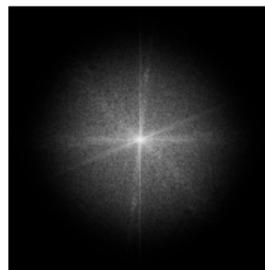
Quel est le spectre d'amplitude le plus probable pour l'image I' résultant d'un traitement fréquentiel de l'image I ?



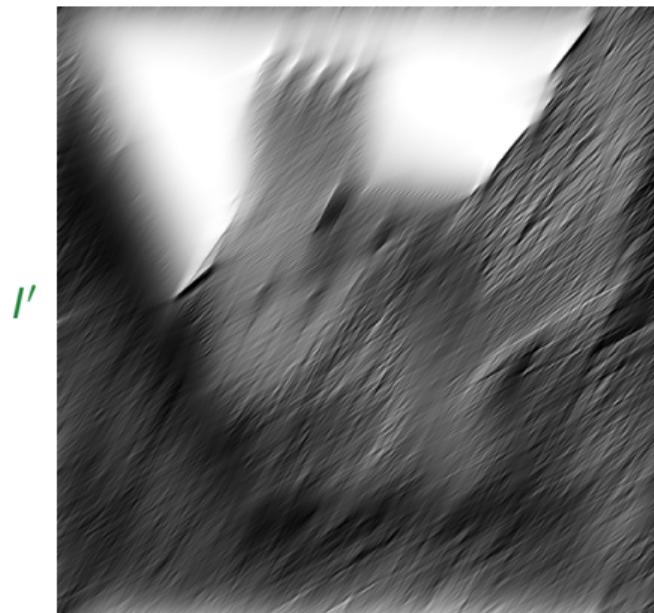
★ Spectre d'amplitude d'une image



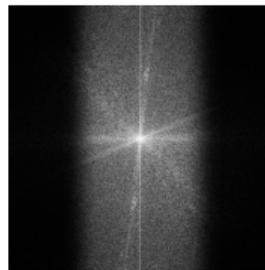
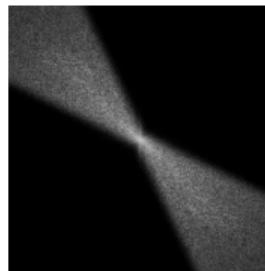
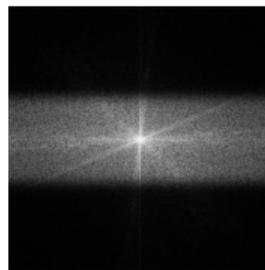
Quel est le spectre d'amplitude le plus probable pour l'image I' résultant d'un traitement fréquentiel de l'image I ?



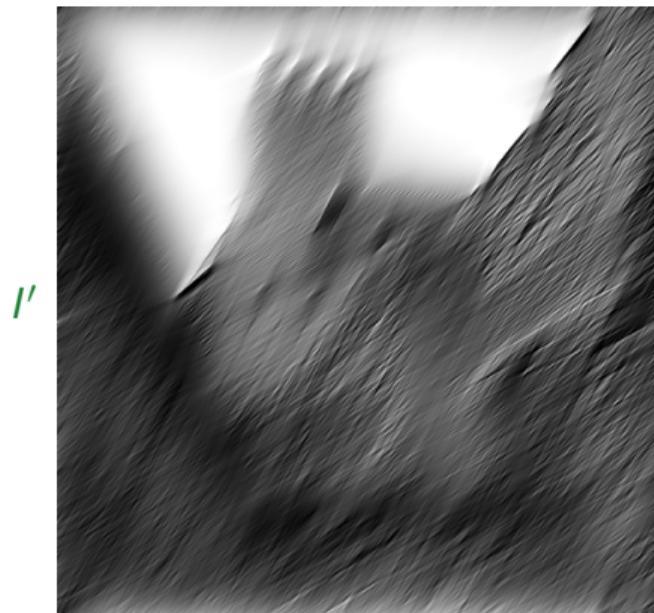
★ Spectre d'amplitude d'une image



Quel est le spectre d'amplitude le plus probable pour l'image I' résultant d'un traitement fréquentiel de l'image I ?

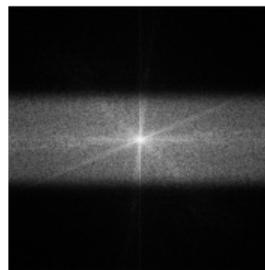


★ Spectre d'amplitude d'une image

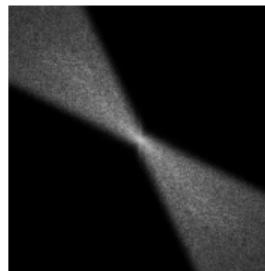


Quel est le spectre d'amplitude le plus probable pour l'image I' résultant d'un traitement fréquentiel de l'image I ?

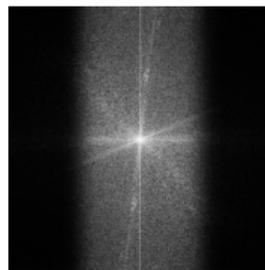
A



B



C

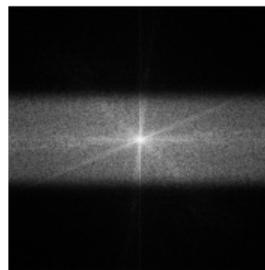


★ Spectre d'amplitude d'une image

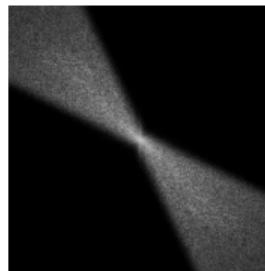


Quel est le spectre d'amplitude le plus probable pour l'image I' résultant d'un traitement fréquentiel de l'image I ?

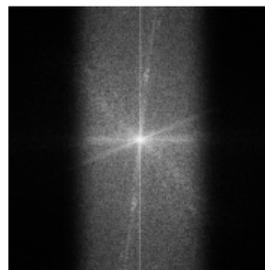
A



B



C



6. Mise en œuvre (efficace) de la transformation

6.1. Transformée de fourier rapide (FFT)

- ▶ méthode directe trop coûteuse
- ▶ FFT : stratégie de division récursive (cas simple : $2^n \times 2^n$)

$$O(n^2) \rightarrow O(n \log(n))$$

- ▶ Logiciel libre FFTW
 - ▶ MIT, Matteo Frigo and Steven G. Johnson.
 - ▶ compatible norme C99 depuis la version 3 (implémentation du type complexe)
 - ▶ $O(n \log(n))$ quelle que soit la taille de l'image (génération en Caml de code C adapté à chaque taille d'image)
 - ▶ bien documenté
 - ▶ <http://www.fftw.org/> (version 3.3.9)
- ▶ Mise en œuvre sur une image discrète I
 - ▶ conversion $I : D \rightarrow \mathbb{R}$ en image à valeur dans \mathbb{C} :

$$I_C(x, y) = I(x, y) + 0i$$

6. Mise en œuvre (efficace) de la transformation

6.1. Transformée de fourier rapide (FFT)

- ▶ méthode directe trop coûteuse
- ▶ FFT : stratégie de division récursive (cas simple : $2^n \times 2^n$)

$$O(n^2) \rightarrow O(n \log(n))$$

- ▶ Logiciel libre **FFTW**
 - ▶ MIT, Matteo Frigo and Steven G. Johnson.
 - ▶ compatible norme C99 depuis la version 3 (implémentation du type complexe)
 - ▶ $O(n \log(n))$ quelle que soit la taille de l'image (génération en Caml de code C adapté à chaque taille d'image)
 - ▶ bien documenté
 - ▶ <http://www.fftw.org/> (version 3.3.9)
- ▶ Mise en œuvre sur une image discrète I
 - ▶ conversion $I : D \rightarrow \mathbb{R}$ en image à valeur dans \mathbb{C} :

$$I_{\mathbb{C}}(x, y) = I(x, y) + 0i$$

6. Mise en œuvre (efficace) de la transformation

6.1. Transformée de fourier rapide (FFT)

- ▶ méthode directe trop coûteuse
- ▶ FFT : stratégie de division récursive (cas simple : $2^n \times 2^n$)

$$O(n^2) \rightarrow O(n \log(n))$$

- ▶ Logiciel libre **FFTW**
 - ▶ MIT, Matteo Frigo and Steven G. Johnson.
 - ▶ compatible norme C99 depuis la version 3 (implémentation du type complexe)
 - ▶ $O(n \log(n))$ quelle que soit la taille de l'image (génération en Caml de code C adapté à chaque taille d'image)
 - ▶ bien documenté
 - ▶ <http://www.fftw.org/> (version 3.3.9)
- ▶ Mise en œuvre sur une image discrète I
 - ▶ conversion $I : D \rightarrow \mathbb{R}$ en image à valeur dans \mathbb{C} :

$$I_{\mathbb{C}}(x, y) = I(x, y) + 0i$$

6.2. Étapes d'un traitement fréquentiel sur une image I avec FFTW

1. → recentrage : $I'(x, y) = (-1)^{(x+y)} I(x, y)$
→ normalisation par $\frac{1}{MN}$ (pas pris en compte par la bibliothèque)

2. → FFT appliquée à l'image complexe : $I' \rightarrow I'_C \rightarrow F$

3. → extraction des spectres d'amplitude A et de phase H :

$$F(u, v) = a + bi \rightarrow \begin{cases} A(u, v) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ H(u, v) = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

4. → traitement fréquentiel : $A \rightarrow A'$ (contrainte de symétrie)

5. → reconstruction de l'image complexe F'

$$F'(u, v) = A'(u, v) \cos(H(u, v)) + iA'(u, v) \sin(H(u, v))$$

6. → FFT inverse : $F' \rightarrow I''_C \rightarrow I''$

7. → inversion du recentrage : $I'''(x, y) = (-1)^{(x+y)} I''(x, y)$

6.2. Étapes d'un traitement fréquentiel sur une image I avec FFTW

1. → recentrage : $I'(x, y) = (-1)^{(x+y)} I(x, y)$
→ normalisation par $\frac{1}{MN}$ (pas pris en compte par la bibliothèque)
2. → FFT appliquée à l'image complexe : $I' \rightarrow I'_C \rightarrow F$
3. → extraction des spectres d'amplitude A et de phase H :

$$F(u, v) = a + bi \rightarrow \begin{cases} A(u, v) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ H(u, v) = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

4. → traitement fréquentiel : $A \rightarrow A'$ (contrainte de symétrie)
5. → reconstruction de l'image complexe F'

$$F'(u, v) = A'(u, v) \cos(H(u, v)) + iA'(u, v) \sin(H(u, v))$$

6. → FFT inverse : $F' \rightarrow I''_C \rightarrow I''$
7. → inversion du recentrage : $I'''(x, y) = (-1)^{(x+y)} I''(x, y)$

6.2. Étapes d'un traitement fréquentiel sur une image I avec FFTW

1. → recentrage : $I'(x, y) = (-1)^{(x+y)} I(x, y)$
→ normalisation par $\frac{1}{MN}$ (pas pris en compte par la bibliothèque)
2. → FFT appliquée à l'image complexe : $I' \rightarrow I'_C \rightarrow F$
3. → extraction des spectres d'amplitude A et de phase H :

$$F(u, v) = a + bi \rightarrow \begin{cases} A(u, v) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ H(u, v) = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

4. → traitement fréquentiel : $A \rightarrow A'$ (contrainte de symétrie)
5. → reconstruction de l'image complexe F'

$$F'(u, v) = A'(u, v) \cos(H(u, v)) + iA'(u, v) \sin(H(u, v))$$

6. → FFT inverse : $F' \rightarrow I''_C \rightarrow I''$
7. → inversion du recentrage : $I'''(x, y) = (-1)^{(x+y)} I''(x, y)$

6.2. Étapes d'un traitement fréquentiel sur une image I avec FFTW

1. → recentrage : $I'(x, y) = (-1)^{(x+y)} I(x, y)$
→ normalisation par $\frac{1}{MN}$ (pas pris en compte par la bibliothèque)
2. → FFT appliquée à l'image complexe : $I' \rightarrow I'_C \rightarrow F$

3. → extraction des spectres d'amplitude A et de phase H :

$$F(u, v) = a + bi \rightarrow \begin{cases} A(u, v) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ H(u, v) = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

4. → traitement fréquentiel : $A \rightarrow A'$ (contrainte de symétrie)
5. → reconstruction de l'image complexe F'

$$F'(u, v) = A'(u, v) \cos(H(u, v)) + iA'(u, v) \sin(H(u, v))$$

6. → FFT inverse : $F' \rightarrow I''_C \rightarrow I''$
7. → inversion du recentrage : $I'''(x, y) = (-1)^{(x+y)} I''(x, y)$

6.2. Étapes d'un traitement fréquentiel sur une image I avec FFTW

1. → recentrage : $I'(x, y) = (-1)^{(x+y)} I(x, y)$
→ normalisation par $\frac{1}{MN}$ (pas pris en compte par la bibliothèque)
2. → FFT appliquée à l'image complexe : $I' \rightarrow I'_C \rightarrow F$

3. → extraction des spectres d'amplitude A et de phase H :

$$F(u, v) = a + bi \rightarrow \begin{cases} A(u, v) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ H(u, v) = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

4. → traitement fréquentiel : $A \rightarrow A'$ (contrainte de symétrie)
5. → reconstruction de l'image complexe F'

$$F'(u, v) = A'(u, v) \cos(H(u, v)) + iA'(u, v) \sin(H(u, v))$$

6. → FFT inverse : $F' \rightarrow I''_C \rightarrow I''$
7. → inversion du recentrage : $I'''(x, y) = (-1)^{(x+y)} I''(x, y)$

6.2. Étapes d'un traitement fréquentiel sur une image I avec FFTW

1. → recentrage : $I'(x, y) = (-1)^{(x+y)} I(x, y)$
→ normalisation par $\frac{1}{MN}$ (pas pris en compte par la bibliothèque)
2. → FFT appliquée à l'image complexe : $I' \rightarrow I'_C \rightarrow F$

3. → extraction des spectres d'amplitude A et de phase H :

$$F(u, v) = a + bi \rightarrow \begin{cases} A(u, v) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ H(u, v) = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

4. → traitement fréquentiel : $A \rightarrow A'$ (contrainte de symétrie)
5. → reconstruction de l'image complexe F'

$$F'(u, v) = A'(u, v) \cos(H(u, v)) + iA'(u, v) \sin(H(u, v))$$

6. → FFT inverse : $F' \rightarrow I''_C \rightarrow I''$
7. → inversion du recentrage : $I'''(x, y) = (-1)^{(x+y)} I''(x, y)$

6.2. Étapes d'un traitement fréquentiel sur une image I avec FFTW

1. → recentrage : $I'(x, y) = (-1)^{(x+y)} I(x, y)$
→ normalisation par $\frac{1}{MN}$ (pas pris en compte par la bibliothèque)
2. → FFT appliquée à l'image complexe : $I' \rightarrow I'_C \rightarrow F$

3. → extraction des spectres d'amplitude A et de phase H :

$$F(u, v) = a + bi \rightarrow \begin{cases} A(u, v) = \sqrt{a^2 + b^2} \\ H(u, v) = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

4. → traitement fréquentiel : $A \rightarrow A'$ (contrainte de symétrie)
5. → reconstruction de l'image complexe F'

$$F'(u, v) = A'(u, v) \cos(H(u, v)) + iA'(u, v) \sin(H(u, v))$$

6. → FFT inverse : $F' \rightarrow I''_C \rightarrow I''$
7. → inversion du recentrage : $I'''(x, y) = (-1)^{(x+y)} I''(x, y)$