

Probabilités Continues

Dans le cas où l'espace des événements élémentaires n'est pas dénombrable les probabilités ne peuvent pas être caractérisées **ponctuellement**. En effet, il se peut que ces probabilités soient **nulles** et, donc, leur connaissance n'apporte aucune information sur la probabilité des événements contenant une **infinité indénombrable** d'événements élémentaires. Considérons à titre d'exemple, les problèmes suivants :

- **(Aiguille de Buffon)**. On lance une aiguille de longueur 1 sur un parquet dont les lames sont parallèles de distance 1. Quelle est la probabilité que l'aiguille chevauche une lame du parquet ?
- Une procédure a généré uniformément trois *réels* aléatoires dans l'intervalle (réel) $[0, 1]$. Quelle est la probabilité pour que ces grandeurs soient les mesures des côtés d'un triangle ?

On *ne peut pas* formuler ces questions en termes de probabilités associées à des valeurs ponctuelles des paramètres qui déterminent l'événement. Nous sommes alors ramené à emprunter d'autres outils que la somme de probabilités (ou d'une série de probabilités).

Dans le cas des espaces continus, le calcul de la probabilité d'un événement par une **somme** (employé dans le cas des espaces discrets) doit être remplacée par une **intégrale**. On *peut* avoir aussi un espace qui n'est ni continu ni discret. Une intégration au sens de Lebesgue peut fournir un encadrement universel *uniforme* pour tous les espaces probabilisés.

Dans la suite, nous introduisons un fondement élémentaire du calcul des probabilités, en supprimant les preuves de certaines constructions, qui peuvent se trouver dans les ouvrages sur le **calcul des probabilités** ou sur la **théorie de la mesure**.

Espace Probabilisé

Définition. Soit Ω un ensemble non vide quelconque. Une famille \mathcal{A} de sous-ensembles de Ω (i.e. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) est appelée σ -algèbre ou *tribu*, si elle contient Ω et est fermée pour la complémentation et la réunion dénombrable :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
- Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Exemple. Pour $\Omega = \{a, b, c\}$, les σ -algèbres possibles sur Ω sont :

- $\{\emptyset, \Omega\}$
- $\{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ et deux autres familles obtenues par les permutations $b \longleftrightarrow a$ et $c \longleftrightarrow a$.
- $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$.

Propriétés. On démontre facilement que :

- Toute σ -algèbre est fermée pour une intersection dénombrable.
- L'intersection d'une classe de σ -algèbres est encore une σ -algèbre
- Soit \mathcal{C} un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. Il y a une plus petite σ -algèbre qui contient \mathcal{C} .

Définitions. La plus petite σ -algèbre contenant \mathcal{C} est appelée σ -algèbre engendrée par \mathcal{C} . Dans le cas de \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^k en général), on prend pour \mathcal{C} la classe des intervalles (ou des pavés) ouverts, fermés, à droite et/ou à gauche (pour \mathbb{R}^k , \mathcal{C} est la classe des pavés du type $\prod_1^k \langle a_i, b_i \rangle$, où \langle et \rangle prennent les valeurs $[$ et $]$). La σ -algèbre engendrée par \mathcal{C} est alors appelée *tribu des boréliens* de \mathbb{R} (ou de \mathbb{R}^k). Cette tribu est notée par \mathcal{B} (ou \mathcal{B}_k).

Exemple. Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Quelle est la σ -algèbre engendrée par $\{\{a\}, \{c, d\}\}$?

Solution. On vérifie facilement que l'ensemble :

$$\mathcal{D} = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

est la plus petite σ -algèbre contenant l'ensemble donné.

Définition. Un *espace probabilisé* est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$, où Ω est un ensemble non vide, \mathcal{A} une σ -algèbre sur Ω et Pr une application de \mathcal{A} dans $[0, 1]$ telle que :

- $Pr(\Omega) = 1$
- pour toute suite $A_i, i \in \mathbb{N}$, d'éléments de \mathcal{A} 2-à-2 disjoints :

$$Pr \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} Pr(A_i). \quad (\sigma\text{-additivité})$$

Pr est appelée une *loi* (ou *mesure* ou *distribution*) de probabilité sur \mathcal{A} , et pour tout $A \in \mathcal{A}$, $Pr(A)$ s'appelle *probabilité* de A .

En ce qui concerne les tribus des boréliens, nous admettons le théorème suivant, dont la démonstration déborde le cadre que nous nous sommes fixé ici.

Théorème. Soit Pr une application de l'ensemble des pavés de \mathbb{R}^k dans $[0, 1]$ satisfaisant :

- $Pr(\mathbb{R}^k) = 1$
- si A est un pavé de \mathbb{R}^k qui est la réunion d'une suite $A_i, i \in \mathbb{N}$ de pavés, 2-à-2 disjoints, de \mathbb{R}^k alors :

$$Pr(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} Pr(A_i).$$

Alors Pr se prolonge de façon unique en une mesure de probabilité sur \mathcal{B}_k .

Propriétés Élémentaires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ un espace probabilisé. Nous avons :

- $Pr(\emptyset) = 0$.
- Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A)$.
- Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$:

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B)$$

et donc :

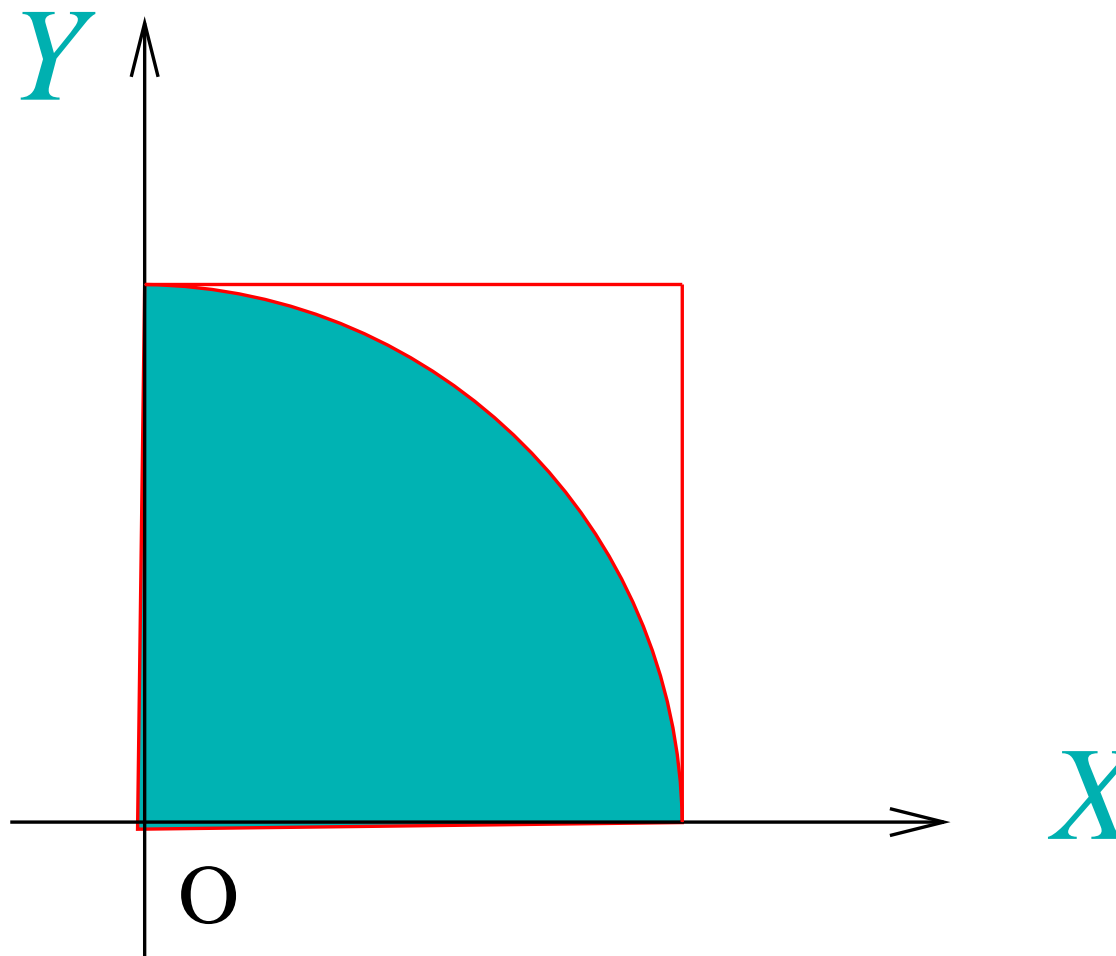
$$Pr(A \cup B) \leq Pr(A) + Pr(B).$$

Quelques Exemples Simples

Exemple 1. Une procédure a généré deux réels X et Y uniformément et indépendamment dans l'intervalle $[0, 1]$. Définir l'espace probabilisé et calculer la probabilité pour que la distance (euclidienne) du point (X, Y) de l'origine ne dépasse pas 1 .

Solution. On prend pour Ω le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. La σ -algèbre \mathcal{A} est engendrée par l'ensemble des pavés (ou ici rectangles) contenus dans Ω . La mesure de probabilité Pr est le prolongement unique de l'application qui associe à tout rectangle contenu dans Ω son aire.

La distance du point (X, Y) de l'origine ne dépasse pas 1 si et seulement si il se trouve à l'intérieur du premier quadrant délimité par le cercle d'origine $(0, 0)$ et de rayon 1 . Or cette région est d'aire $\frac{\pi}{4}$. D'où la probabilité recherchée vaut $\frac{\pi}{4}$.



$$Pr(\text{Zone Hachurée}) = \frac{\pi}{4} \approx 0.78539816$$

Exemple 2. Une procédure génère les réels X et Y uniformément et indépendamment dans l'intervalle $[a, b]$, où $a < b$, et en retourne le maximum. Quelle la probabilité pour que la valeur retournée soit $\leq z \in [a, b]$? Pour qu'elle appartienne à l'intervalle $[c, d] \subset [a, b]$?

Solution. Soit $Z = \max\{X, Y\}$. Pour tout $z \in [a, b]$, on a $Z \leq z$ si et seulement si $X \leq z$ et $Y \leq z$. La probabilité de chacun de ces deux événements est $\frac{z-a}{b-a}$. Ils sont de plus indépendants et, donc :

$$Pr(Z \leq z) = \frac{(z - a)^2}{(b - a)^2}.$$

On en déduit :

$$Pr(c < Z \leq d) = \frac{(d - a)^2}{(b - a)^2} - \frac{(c - a)^2}{(b - a)^2}.$$

Fonction de Répartition

Dans la suite, nous introduisons la fonction de répartition et la densité (lorsqu'elle existe) pour les mesures de probabilités définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Soit Pr une mesure de probabilité. Sa *fonction de répartition* (f.r.) F est définie par :

$$F(t) = Pr (] - \infty, t]), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Propriétés

Nous admettons les deux propositions suivantes sur les f.r.

Proposition. La f.r. F est croissante, à valeur dans $[0, 1]$, continue à droite et telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$.

La proposition suivante permet de caractériser une loi de probabilité en termes de sa f.r.

Proposition. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ croissante, continue à droite et telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$. Alors il existe une mesure de probabilité unique P_r sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ dont la f.r. est F .

Densité

Soit F la f.r. de la distribution Pr . S'il existe une fonction f telle que :

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

alors cette fonction f s'appelle *densité* de Pr . La f.r. étant croissante, si la densité f existe, son intégrale de $-\infty$ à t , doit valoir $F(t)$. Donc, on peut définir la densité f comme la dérivée de de la f.r., si cette dernière en admet une.

Quelques Exemples Simples

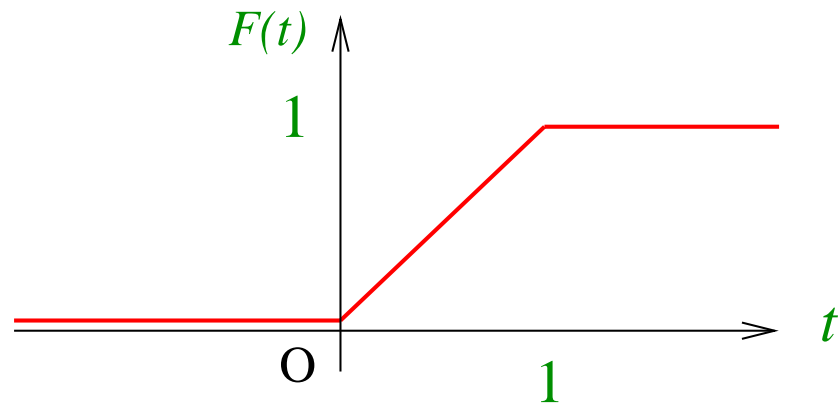
Exemple 1. Soit Pr la distribution uniforme sur $[0, 1]$, donnée par $Pr(\langle a, b \rangle) = l([0, 1] \cap \langle a, b \rangle)$, pour tout intervalle $\langle a, b \rangle$, où l'application l désigne la *longueur* d'un intervalle.

La f.r. est donnée par :

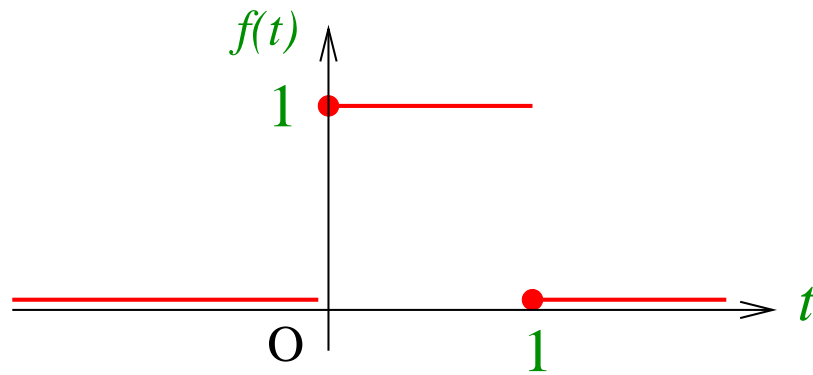
$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Elle admet la densité :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$



Fonction de répartition de la loi uniforme



Densité de la loi uniforme

Exemple 2. Soit Z la valeur maximale de deux réalisations indépendantes de la loi uniforme dans $[0, 1]$, fournie par l'exemple précédent. Nous avons :

$$Pr(Z \leq t) = Pr(X \leq t \text{ et } Y \leq t) = t^2, \quad \forall t \in [0, 1].$$

On en déduit :

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Cette f.r. admet la densité :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$