

Indépendance

Définitions

- Deux événements A et B sont dit *indépendants*, si :

$$Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B).$$

- Une famille $A_i, i = 1, \dots, n$, d'événements est dite *indépendante dans son ensemble*, si pour tout sous-ensemble $J \subset \{1, \dots, n\}$:

$$Pr \left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) = \prod_{i \in J} Pr(A_i).$$

Remarque. Pour démontrer l'indépendance d'une famille $A_i, i = 1, \dots, n$, il ne suffit pas de prouver que les A_i sont 2-à-2 indépendants, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ l'espace associé au tirage d'un dé à 8 faces avec la probabilité uniforme $\frac{1}{8}$. Soient :

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A_2 = \{1, 2, 5, 6\}$$

$$A_3 = \{3, 4, 5, 6\}$$

On a :

$$Pr(A_1 \cap A_2) = Pr(\{1, 2\}) = \frac{1}{4} = Pr(A_1)Pr(A_2)$$

$$Pr(A_1 \cap A_3) = Pr(\{3, 4\}) = \frac{1}{4} = Pr(A_1)Pr(A_3)$$

$$Pr(A_2 \cap A_3) = Pr(\{5, 6\}) = \frac{1}{4} = Pr(A_2)Pr(A_3)$$

Or :

$$Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = Pr(\emptyset) = 0 \neq Pr(A_1)Pr(A_2)Pr(A_3) = \frac{1}{8}.$$

Probabilités Conditionnelles

Il arrive que la donnée d'un événement modifie la probabilité initialement affectée à un autre. La notion de **probabilité conditionnelle** est introduite afin de formaliser le concept de la probabilité de l'occurrence d'un événement B sachant qu'un autre A s'est produit.

Notons tout de suite que B conditionné par A *n'implique pas* que A précède nécessairement B (dans l'ordre chronologique).

Exemple. Un dé uniforme est lancé et nous savons que le point obtenu est **pair** (événement A). Quelle est la probabilité pour que le point **soit au moins 4** (événement B) ?

Il est clair que le nouvel espace (conditionné par l'événement A) sur lequel les événements élémentaires sont à définir est $\Omega' = A$, qui contient 3 éléments. Or, la portion de A qui est en même temps favorable à B en contient 2. Il est donc raisonnable de définir la probabilité de B conditionné par A par le ratio $\frac{2}{3}$ (à comparer avec $Pr(B) = \frac{1}{2}$).

Définitions. Soit (Ω, Pr) un espace probabilisé discret et soit A un événement de probabilité non nulle. On définit sur $\mathcal{P}(\Omega)$, l'application $Pr(. / A)$ à valeurs dans $[0, 1]$ par :

$$Pr(B/A) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(A)}, \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega).$$

On appelle $Pr(B/A)$ *probabilité conditionnelle de B sachant A* (ou *probabilité de B sachant A*).

Nous avons alors :

$$Pr(A \cap B) = Pr(B/A)Pr(A).$$

Nous disons alors que l'on a *effectué un conditionnement par A*.

Dans le cas où $Pr(A) \neq 0$, l'indépendance de A et B est équivalente à $Pr(B/A) = Pr(B)$; ce qui est en accord avec sa définition intuitive.

Proposition. Le couple $(A, Pr(. / A))$ est un espace probabilisé discret.

Proposition. Soit A_1, \dots, A_n une partition de Ω . Si chacun de ces ensembles est de probabilité non nulle, alors :

$$Pr(B) = \sum_{i=1}^n Pr(A_i)Pr(B/A_i), \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Exemple. On lance deux dés uniformes.

- Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points vaut 8 ?
- Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points vaut au moins 10 ?

Solution : Chacune de ces probabilités conditionnelles est définie par une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'intersection et le dénominateur celle de la condition. On trouve facilement :

- $Pr(\text{double}/S = 8) = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}$.
- $Pr(\text{double}/S \geq 10) = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}$.

Probabilité des Causes

Soit l'événement B causé par l'un des événements A_1, A_2, \dots, A_n , tous de probabilité non nulle. On connaît les probabilités $Pr(A_i)$ de ces derniers événements et aussi les probabilités conditionnelles $Pr(B/A_i)$. Comment trouver les probabilités des causes sachant que B s'est produit, i.e. les probabilités $Pr(A_i/B)$?

Théorème (Formule de Bayes). Soit A_1, \dots, A_n une partition de Ω telle que $Pr(A_i) \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Soit B un événement de probabilité non nulle. Nous avons :

$$Pr(A_i/B) = \frac{Pr(A_i)Pr(B/A_i)}{\sum_{j=1}^n Pr(A_j)Pr(B/A_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En particulier, pour deux événements A et B de probabilité non nulle, nous avons :

$$Pr(A/B) = \frac{Pr(A)Pr(B/A)}{Pr(B)}.$$

- $Pr(A)$: *probabilité a priori de A*
- $Pr(A/B)$: *probabilité a posteriori de A*

Exemple (F. Dress). Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir une question de repêchage en tirant au hasard parmi 3 papiers. Il y a :

- une question facile avec 3 chances sur 4 de donner la réponse correcte,
- une question moyenne avec 2 chances sur 5 de donner la réponse correcte, et
- une question difficile avec 1 chance sur 5 de donner la réponse correcte.

Sachant que le candidat a donné la réponse **correcte**, quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse de la question **facile** ?

Solution : Désignons par F , M et D les événements tirage de la question facile, de la question moyenne et de la question difficile respectivement. Soit, par ailleurs, l'événement "réponse correcte" noté par C .

D'après la formule de Bayes, nous avons :

$$Pr(F/C) = \frac{Pr(F)Pr(C/F)}{Pr(C/F)Pr(F) + Pr(C/M)Pr(M) + Pr(C/D)Pr(D)},$$

ce qui vaut :

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{5}{9}.$$

Loi Conjointe

Dans la suite, nous considérons un couple de v.a., mais l'étude s'étend à un nombre quelconque de v.a.

Définitions. Soient X et Y deux v.a. réelles sur le même espace Ω . Le couple (X, Y) peut être considéré comme un **vecteur** aléatoire sur Ω . Sa loi est appelée *loi conjointe* de (X, Y) . La connaissance de cette dernière permet de retrouver la loi de X et celle de Y individuellement. En effet, pour tout ensemble $A \subset X(\Omega)$ et tout ensemble $B \subset Y(\Omega)$:

$$Pr_1(X \in A) = Pr(X \in A, Y \in \mathbb{R})$$

et

$$Pr_2(Y \in B) = Pr(X \in \mathbb{R}, Y \in B).$$

X et Y sont dites *indépendantes*, si pour tout ensemble $A \subset X(\Omega)$ et tout ensemble $B \subset Y(\Omega)$:

$$Pr(X \in A, Y \in B) = Pr_1(X \in A)Pr_2(Y \in B).$$

Les distributions Pr_1 et Pr_2 sont appelées *lois marginales* du vecteur (X, Y) . Dans la suite, nous supprimons les indices de Pr lorsqu'il n'y a pas le danger de confusion. La connaissance des lois marginales **ne permet pas** de reconstruire la loi conjointe.

Exemple. On lance une pièce authentique une première fois. Pour le 2e lancer, on considère deux possibilités :

- A.** On reprend la pièce et on la repose sur la même face.
- B.** On la relance indépendamment du premier lancer.

Les lois conjointes sont données par :

A. $Pr(\{F, F\}) = Pr(\{P, P\}) = \frac{1}{2}$ et $Pr(\{F, P\}) = Pr(\{P, F\}) = 0$.

B. $Pr(\{F, F\}) = Pr(\{P, F\}) = Pr(\{F, P\}) = Pr(\{P, P\}) = \frac{1}{4}$.

Il s'agit donc de deux lois **distinctes**

Les lois marginales dans les deux cas sont données par :

$$Pr(\{P\}) = Pr(\{F\}) = \frac{1}{2}.$$

Pour deux lois conjointes **distinctes**, on a les **mêmes** lois marginales.

Espérance Conditionnelle

Soit X une v.a. et soit A un événement de probabilité non nulle.
L'espérance de X sachant A est définie par :

$$\mathbb{E}(X/A) = \mathbb{E}_{Pr(. / A)} X$$

ou :

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{Pr(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega) Pr(\{\omega\}).$$

Exemple. Quelle est l'espérance d'un dé uniforme sachant que le nombre sorti est inférieur ou égal à 3 ?

Solution : Soit X la v.a. associée au lancer du dé. L'événement A associé à la condition est l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. La probabilité de la condition A est $\frac{1}{2}$. L'espérance conditionnelle recherchée vaut :

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right] = 2.$$