

Dépendance, probabilités conditionnelles et formule de Bayes.

Version électronique (pdf) disponible à l'adresse :

<http://dept-info.labri.fr/ENSEIGNEMENT/probastats>

Les probabilités sont parfois liées de manière conditionnelle et rendent difficile l'évaluation du lien de cause à effet. Nous revenons ici sur les résultats de base pour raisonner sur ces situations et explorons un résultat de Bayes qui s'avère encore aujourd'hui l'un des piliers de la théorie des probabilités.

Exercice 1. - Poker

Vous jouez au poker, version Texas Hold'em¹. Le croupier distribue les cartes et vous recevez vos deux cartes : un as et un valet de pique (!).

1. Quelle est la probabilité que vous obteniez une quinte flush royale ? (une série de cinq cartes dans la même couleur allant de l'as au 10).
2. Quelle est la probabilité que vous obteniez un full formé de trois as et de deux valets ?

Exercice 2. - Bits

Des bits sont envoyés à la suite sur un canal, et sont égaux soit à 0, soit à 1 avec même probabilité.

1. Vous enregistrez deux bits à la suite b_0, b_1 .
 - Quelle est la probabilité que les deux bits aient des valeurs différentes (l'un vaut 0, l'autre vaut 1) ?
 - Quelle est la probabilité que le second bits soit égal à 1 si le premier est égal à 0 ?
2. On note maintenant la valeur de quatre bits envoyés à la suite.
 - Trouvez la probabilité d'avoir au moins deux bits égaux à 1 parmi les quatre.
 - Trouvez la probabilité d'avoir au moins deux bits égaux à 1 tout en étant certain (sachant que) que l'un d'entre eux l'est.
 - Trouvez la probabilité que tous les bits soient effectivement égaux à 1 sachant qu'au moins deux d'entre eux sont effectivement égaux à 1.

Exercice 3. - $P(A \cap B \cap C)$

Soient A, B, C des évènements quelconques, tels que A et $A \cap B$ sont de probabilités non nulles. Utilisez la formule de probabilité conditionnelle pour déduire l'identité $P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = P(A \cap B \cap C)$.

¹Dans cette version du jeu, chaque joueur reçoit d'abord deux cartes. Puis cinq cartes sont découvertes au centre de la table. Le joueur qui "gagne" – on ignore ici l'effet des mises – est celui qui fabrique la meilleure main de cinq cartes en composant avec les siennes et les cartes communes à tous les joueurs.

Exercice 4. - Guerre de processus Imaginons deux threads s'exécutant simultanément, chacun réclamant au système une portion mémoire à différents moments. On suppose que les threads t_a et t_b demande à chaque fois une portion mémoire de taille fixe et qu'à la fin de leur exécution t_a aura demandé m portions mémoires, alors que t_b en aura demandé n , avec $m \geq n$. On s'intéresse à la probabilité que le thread t_a ait constamment plus de mémoire à sa disposition que le threads t_b .

Nous allons modéliser ce problème de la façon suivante : les demandes successives des threads sont décrites par une séquence de a et de b (un mot). Une séquence qui maintient l'avantage à t_a (plus de mémoire accordée à t_a à tout moment) est un mot dont les préfixes comptent toujours plus de a que de b .

Soient $n, m \geq 0$, avec $m \geq n$. On note $C(m, n)$ l'ensemble des mots u de $\{a, b\}^*$ tels que $|u|_a = m$ et $|u|_b = n$, i.e. u est constitué de m lettres a et de n lettres b . Soit $p : \{a, b\}^* \rightarrow Z$ l'application définie par $p(u) = |u|_a - |u|_b$. On propose de calculer la probabilité de l'évènement $D = \{u \in C(m, n) | \forall v \neq \epsilon \text{ préfixe de } u, p(v) > 0\}$.

- Soit $C_b(m, n)$ l'ensemble des mots de $C(m, n)$ commençant par b . Décrire l'évènement $E = C(m, n) \setminus D$ et montrer que $P(E) = 2P(C_b(m, n))$.
- En déduire la probabilité que le threads t_a dispose toujours de plus de mémoire que le threads t_b .

Exercice 5. - Signaux visuels

Deux applications affichent sur un écran de contrôle (ouvert en permanence) un signal visuel toutes les deux minutes pour attirer l'attention de l'utilisateur. Le second signal visuel s'affiche toujours 20 secondes après le premier. Un utilisateur vient s'asseoir devant l'écran à l'instant t . Combien de temps en moyenne va t'il attendre l'arrivée du prochain signal ?

Exercice 6. - Emission de bits Sur une séquence S de n bits. On définit une procédure d'ajout d'un $(n + 1)$ ème bit b par : si $|S|_1$ (le nombre de bits égaux à 1 dans S) est impair alors $b = 1$ sinon $b = 0$. On obtient ainsi une séquence de bit S' . L'émission des bits n'étant pas sécurisée, il se peut que la séquence S' ne soit pas cohérente. On suppose qu'un bit 1 de la séquence S' est émis avec la probabilité p . Dans quelle mesure l'ajout du $(n + 1)$ ème bit permet-t-il de contrôler que la séquence S n'a pas été altérée ?

Exercice 7. - Processeurs en panne

Un contrôle systématique est effectuée sur un ensemble de processeurs dont 15% présentent une panne non apparente. Ce dépistage est débuté par un test qui donne 95% de résultats positifs pour les processeurs défectueux, et 10% de résultats positifs pour les processeurs non défectueux. Quelle est la probabilité (conditionnelle) qu'un processeur pris au hasard présente la panne sachant que le test a donné un résultat positif ?

Exercice 8. - Barrettes mémoire

Une usine fabrique des barrettes mémoire à l'aide de trois machines A , B et C . La machine A assure 20% de la production et 5% des barrettes fabriquées par A sont défectueuses. La machine

B assure 30% de la production et 4% des barrettes fabriquées par B sont défectueuses. La machine C assure 50% de la production et 1% des barrettes fabriquées par C sont défectueuses.

1. On choisit au hasard une barrette. Calculer les probabilités :
 - pour que la barrette soit défectueuse et produite par A ,
 - pour que la barrette soit défectueuse et produite par B ,
 - pour que la barrette soit défectueuse et produite par C .
2. Calculer les probabilités pour qu'une barrette défectueuse :
 - provienne de A ,
 - provienne de B ,
 - provienne de C .