

### Lois de distributions classiques.

Version électronique (pdf) disponible à l'adresse :

<http://dept-info.labri.fr/ENSEIGNEMENT/probastats>

De nombreux phénomènes peuvent être modélisés de même manière. On y reconnaît certaines lois de probabilités de référence qui sont étudiées ici.

Ce TD repose sur la partie du cours "Probabilités discrètes" et explore ces lois de probabilités, leurs moyenne et variance (obtenues en manipulant les séries génératrices) et quelques exemples d'application.

**Exercice 1. - Loi binomiale** On rappelle qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n, p)$  si  $X$  prend ses valeurs parmi  $\{0, \dots, n\}$  avec probabilité  $Pr(X = k) = p^k(1 - p)^{n-k} \binom{n}{k}$ .

- Donnez un exemple de phénomène modélisé par une variable aléatoire de loi binomiale  $(n, p)$ .
- Quelle est la série génératrice d'une variable aléatoire  $X$  suivant la loi binomiale de paramètres  $(n, p)$  ? En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .

### Exercice 2. - Loi géométrique

On rappelle qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$  si  $X$  prend ses valeurs dans  $N$  avec la probabilité  $Pr(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$  pour  $k \geq 1$ .

- Donnez un exemple de phénomène modélisé par une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $p$ .
- Quelle est la série génératrice d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi géométrique de paramètre  $p$  ? En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .

### Exercice 3. - Loi de Poisson

On rappelle qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  si  $X$  prend ses valeurs dans  $N$  avec la probabilité  $Pr(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

Cette loi sert à modéliser les phénomènes où le temps écoulé entre deux observations est en moyenne égale à  $\lambda$  (le temps écoulé entre l'arrivée de deux clients en caisse, ...).

Quelle est la série génératrice d'une variable aléatoire  $X$  suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  ? En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .

**Note.** Dans les exercices qui suivent, vous déterminerez la distribution la plus à même de modéliser la situation étudiée. Vous utiliserez ensuite les éléments de l'énoncé et les propriétés de la distribution pour résoudre le problème.

---

#### Exercice 4. - Graphe aléatoire

On imagine un procédé pour fabriquer un graphe  $G = (V, E)$  "au hasard". On pose  $V = \{1, \dots, n\}$ . Pour chaque paire de sommets  $\{i, j\}$  (avec  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ), on insère dans  $G$  l'arête  $\{i, j\}$  avec probabilité  $p$ .

1. Quelle est la probabilité de fabriquer au hasard un graphe ayant  $k$  arêtes ?
2. Quelle est le nombre moyen d'arêtes d'un graphe fabriqué "au hasard" ?
3. Un groupe de  $N$  personnes communiquent afin de monter une opération clandestine. Au cours de l'opération, chaque personne tente de communiquer avec chacune des autres (et une seule fois). Deux personnes données réussissent à échanger leurs informations avec probabilité  $p \in [0, 1]$ . Combien de communications seront établies en moyenne ? quelle variance observe t-on ?

#### Exercice 5. - Virus informatique

Un virus informatique à son initialisation occupe 0,1 Mo. A chaque itération, il occupe  $k$  fois plus de mémoire et s'arrête avec probabilité  $p$  (puis libère la mémoire occupée). Dans quelle mesure ce virus risque-t-il de saturer la mémoire ? (La réponse est fonction de la taille totale  $T$  de la mémoire disponible.)

#### Exercice 6. - Tableau

On doit pré-dimensionner un tableau, qui est une ressource pour un ensemble de processus : un processus qui s'exécute a besoin d'une entrée dans le tableau. Si aucune entrée n'est disponible alors il est mis en attente dans une file. On sait qu'en moyenne  $p$  processus s'exécutent en même temps. Comment dimensionner le tableau pour qu'il n'y ait pas plus de 10% de processus en attente *en moyenne*.

**Exercice 7. - Algorithme et complexité** Un algorithme reçoit en entrée une liste d'entiers positifs. Sa complexité est une fonction du nombre d'entiers pairs  $p$ ,  $f(p) = p^2 + 1$ . Donner la complexité moyenne de cet algorithme.

**Exercice 8. - Impression** Un utilisateur peut à tout moment exécuter  $q$  processus différents avec la même probabilité  $p$ . L'un de ces processus concerne l'impression. Etudiez ce processus d'impression pour  $N$  utilisateurs.

**Exercice 9. - Approximation poissonnienne** On admet la proposition suivante (qu'on utilisera). Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $IN$ . Soit  $(G_n)_{n \geq 0}$  la suite des fonctions génératrices correspondantes. Si  $G_n$  tend vers  $G$ , la fonction génératrice de la variable aléatoire  $X$ , alors la suite de variables aléatoires  $X_n$  tend vers  $X$ , i.e.,  $\forall k \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} Pr(X_n = k) = Pr(X = k)$ .

En utilisant la proposition précédente, montrer que, si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variable aléatoire binomiale de paramètres  $p_n$  et  $n$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = \lambda > 0$ , alors  $X_n$  tend vers une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Dans une entreprise, 900 utilisateurs demandent chaque jour à l'équipe système de recharger les imprimantes en papier avec une probabilité  $p = 0,001$ . On suppose que chaque utilisateur a un comportement indépendant des autres utilisateurs. Quel est le nombre minimum de ramettes de papier que l'équipe système doit avoir en stock le matin si elle veut être en mesure de pouvoir satisfaire l'ensemble des demandes avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95 ?

**Exercice 10. - File d'impression** Le logiciel client qui permet de gérer la file d'impression (visualisation de la liste des impressions en attente) n'est pas totalement fiable : il affiche effectivement les tâches en attente dans 99,9% des cas. Dans 0,01% des cas, l'impression qui vient d'être lancée n'apparaît pas. Un utilisateur novice s'entête : s'il ne voit pas l'impression qu'il vient de lancer, il la relance aussitôt. Combien de fois en moyenne cet utilisateur risque-t-il de lancer la même impression ?