

Séries génératrices.

Version électronique (pdf) disponible à l'adresse :

<http://dept-info.labri.fr/ENSEIGNEMENT/probastats>

Les séries génératrices sont un outil formel pour manipuler une distribution de probabilités et pour dériver facilement la moyenne et l'écart-type, par exemple. Il devient fondamental lorsqu'on aborde l'analyse d'algorithmes.

Ce TD repose sur la partie du cours "Probabilités discrètes" et explore les notions de moyenne et de variance obtenues en manipulant les séries génératrices.

Exercice 1. - Pile ou face - suite On tire à "pile ou face" $2n$ fois de suite. On décrit cette expérience par l'espace de probabilité $\Omega = \{P, F\}^n$ et on suppose que chaque événement atomique (P ou F) est équiprobable. On considère les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_{2n} définies par : $X_i(w) = 1$ si on obtient "pile" au i^{me} lancer et $X_i(w) = 0$ sinon.

1. – Quelle est la fonction génératrice de la variable X_i ?
– En déduire son espérance, sa variance.
2. Soit la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{2n} X_i$.
– Calculez la fonction génératrice de S . Quel est le coefficient de z^n dans cette série ?
– En déduire la probabilité "d'obtenir autant de piles que de faces".
– Calculez l'espérance de S et sa variance.

Exercice 2. - Jeu de dé - suite

1. On considère le jeu qui consiste à lancer un dé (à six faces) et on suppose tous les résultats équiprobables. À cette expérience, on associe la variable aléatoire X qui correspond à la valeur du dé.
– Calculez la série génératrice de X .
– En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de X .
– On pose $Y = 2X$. Quelle est la fonction génératrice de Y ?
– On pose $Z = X + 3$. Quelle est la fonction génératrice de Z ?
2. On considère le jeu qui consiste à lancer deux dés et on suppose tous les résultats équiprobables. À cette expérience, on associe la variable aléatoire S qui correspond à la somme des deux dés et la variable aléatoire T qui correspond au produit.
– Calculez l'espérance de T . Comparez cette valeur à l'espérance de X^2 .
– Calculez la série génératrice de S . Comparez ce résultat à la série génératrice de Y .

Exercice 3. -

Soit l'espace de probabilité $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$.

1. On considère la distribution de probabilité $P : k \mapsto \alpha \cdot C_n^k$ (où C_n^k désigne le coefficient binomial).
 - Quelle est la valeur de α ?
 - Quelle est la série génératrice de cette distribution ? (c'est-à-dire la fonction génératrice de la variable aléatoire identité) ?
 - Quelle est son espérance ?
2. On considère à présent la distribution de probabilité $P : k \mapsto \beta \cdot kC_n^k$.
 - Quelle est la valeur de β ?
 - Quelle est la série génératrice de cette distribution ?
 - Quelle est son espérance ?

Exercice 4. - Analyse d'algorithme

On se propose d'analyser la complexité (temps de calcul) en moyenne d'un algorithme. On considère l'algorithme ci-dessous pour trouver le plus grand élément dans une liste non vide L de n entiers :

début

(1) $M := L[1]$

(2) pour $j := 2$ à n faire

(3) si $L[j] > M$ alors $M := L[j]$

fin

- Quel est le nombre de comparaisons effectuées (ligne 3) ?
- Quel est le nombre d'affectations (lignes 1 et 3) dans le cas le plus favorable ? le plus défavorable ?

Dans la suite, on suppose que les éléments de la liste sont deux-à-deux distincts et que tous les $n!$ permutations possibles ont la même probabilité d'apparaître dans la liste. Soit $p(n, k)$ la probabilité pour que, lors du déroulement de l'algorithme sur une liste (aléatoire) L de taille n , k affectations soient nécessaires.

- Montrez la récurrence suivante :

$$p(n, k) = \frac{1}{n}p(n-1, k-1) + \frac{n-1}{n}p(n-1, k)$$

pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$. (Il faut distinguer deux cas de figures et raisonner selon que le n^{me} élément est maximal ou non.)

- Soit par ailleurs, $G_n(z) = \sum_{k=1}^n p(n, k)z^k$ la fonction génératrice de la distribution des probabilités $p(n, k)$. Dédurre de la récurrence ci-dessus une récurrence sur G_n et donner une expression simple pour G_n .
- Trouvez le nombre moyen d'affectations, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^n kp(n, k)$. Quel est son ordre de grandeur lorsque $n \rightarrow \infty$?