

Espaces probabilisés, espérance mathématique, variance.

Version électronique (pdf) disponible à l'adresse :

<http://dept-info.labri.fr/ENSEIGNEMENT/probastats>

Le calcul de probabilités discrètes se ramène la plupart du temps à énumérer puis compter des objets (des séquences, des combinaisons, des ensembles) qui modélisent la situation étudiée. Le comptage suit d'une description méthodique des ensembles considérés.

Ce TD repose sur la partie du cours "Probabilités discrètes" et explore les notions de moyenne et de variance.

Exercice 1. - Décrire un espace de probabilités qui modélise une expérience

Dans une fabrique de processeurs, on prélève toutes les heures les trois derniers processeurs produits. Ceux-ci sont classés dans deux catégories : fonctionnel, codé 1 et défectueux, codé 0.

1. Décrivez l'espace associé à cette expérience aléatoire (par quoi peut-on représenter l'expérience (les états des trois processeurs p_1, p_2, p_3 sélectionnés) ?)
2. Décrivez (en termes ensemblistes) les événements suivants :
 - A = "le premier processeur est défectueux"
 - B = "le dernier est fonctionnel"
 - C = "deux processeurs sont défectueux"
 - D = "au moins deux processeurs sont fonctionnels".

Exercice 2. - Le problème du chevalier de Méré

Lequel de ces deux événements est le plus probable : "Obtenir au moins une fois un six en quatre lancers de dés", ou "Obtenir au moins un double six en vingt quatre lancers de deux dés".

Exercice 3. - Le bon choix Vous jouez à un jeu télévisé pour gagner un PC de dernière génération. Le PC se trouve derrière une porte parmi trois A, B ou C ; les deux autres portes cachent des babioles. Après avoir fait votre choix, le présentateur télé ouvre une porte derrière laquelle se trouve un première babiole.

Il vous propose soit de rester sur votre premier choix, soit d'échanger et d'opter plutôt pour la porte qu'il n'a pas ouverte ... Avez-vous avantage à rester sur votre premier choix ou à changer ?

Etudiez d'abord vos chances de gagner en faisant l'hypothèse que vous changez de porte quoiqu'il arrive. Puis étudiez le cas où vous ne changez pas de porte.

Exercice 4. - Jeux de données

On considère des jeux de données permettant de tester la robustesse de l'implémentation d'un algorithme, dont 8 sont jugés d'une complexité "élevée" et 6 sont jugés de complexité "moyenne". On choisit au hasard des jeux de données qu'on soumet à l'algorithme, chaque jeu de données ayant la même probabilité d'être choisi.

1. On tire simultanément 5 jeux de données. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - 3 jeux de complexité élevée et 2 de complexité moyenne ?
 - des jeux de données de complexités différentes (pas tous de complexité élevée ou tous de complexité moyenne) ?
2. On tire successivement 5 jeu de données, en s'autorisant à choisir le même jeu de données plus d'une fois. Quelle est la probabilité d'avoir :
 - 3 jeux de complexité élevée puis 2 de complexité moyenne (dans cet ordre) ?
 - 3 jeux de complexité élevée puis 2 de complexité moyenne (peu importe l'ordre dans lequel ils sont apparus) ?

Exercice 5. - Lancers de dés On considère le jeu qui consiste à lancer simultanément 2 dés (1 dé rouge, un dé bleu). A cette expérience, on associe la variable aléatoire X qui correspond à la somme des valeurs indiquées par les dés.

Calculez l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$. On joue maintenant n fois à ce jeu, le résultat étant la somme des dés obtenus à chaque lancer. De même, calculez l'espérance et la variance pour ce jeu.

Exercice 6. - Casino Au casino, une machine à sous fonctionne de la manière suivante : on introduit une pièce de 2 euros et trois roues tournent ; chaque roue s'arrête sur un chiffre de 0 à 9 aléatoirement. Si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise, s'il y a un "double", celui-ci gagne 4 euros et enfin s'il obtient un "triple", il gagne x euros.

1. Calculez l'espérance mathématique, en fonction de x , du gain pour le joueur. De même calculez la variance.
2. En déduire la valeur limite de x pour laquelle le jeu est favorable à la banque.

Exercice 7. - Pile ou face ? On considère le jeu de "pile ou face", décrit par l'espace probabilisé suivant $\Omega = \{P, F\}$ (la pièce tombe sur pile ou sur face), chaque événement atomique étant équiprobable.

1. On itère le jeu $2n$ fois (l'espace probabilisé devient donc Ω^{2n}). Quelle est la probabilité "d'obtenir autant de piles que de faces" ?
2. On considère la variable aléatoire X égale au nombre d'occurrences de la séquence $\underbrace{PP \dots P}_k$. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X (on pourra écrire X comme une somme de variables aléatoires) ?