

Indiquez votre code d'anonymat : No :

Barème

Questions : 6 points

Exercices 1, 2, 3 : chacun 7 points

Questions

(Justifier vos réponses)

1. Dans un lancer d'un dé équilibré, les événements A , B et C sont définis par :

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 4, 5\} \text{ et } C = \{1, 2, 4, 6\}.$$

Montrer que A et C d'une part et B et C d'autre part sont indépendants. Peut-on en déduire que $A \cup B$ et C sont aussi indépendants ?

2. On suppose de nouveau que A et C d'une part et B et C d'autre part sont indépendants. Et cette fois, on introduit l'hypothèse supplémentaire que A et B sont disjoints. Peut-on alors affirmer que $A \cup B$ et C sont indépendants ?
3. Soit X_1, X_2, \dots, X_k une suite de $k > 0$ v.a. indépendantes normales et soit b une constante réelle. On suppose que chaque v.a. X_i est de type $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ (i.e. normale d'espérance μ_i et d'écart-type σ_i). Quelle est distribution de la v.a. $Y = \sum_{1 \leq i \leq k} X_i + b$?

Choisissez 2 exercices parmi les 3 exercices proposés

Exercice 1. Soit X une v.a. discrète, prenant des valeurs entières positives, avec les probabilités :

$$P(X = n) = np^2(1 - p)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

avec $0 < p < 1$.

1. Prouver que P est bien une distribution de probabilité. On rappelle que, pour x de valeur absolue strictement inférieure à 1, on a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
2. Calculer la fonction génératrice de X .
3. En déduire l'espérance de X .

Exercice 2. On suppose que la durée de vie d'un individu est une v.a. T de densité :

$$f(t) = \begin{cases} ct^2(100 - t)^2 & \text{si } t \in [0, 100] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Calculer l'espérance de X .

3. Quelle est la probabilité pour qu'un individu ait une durée de vie entre 50 et 80 ans ?

Exercice 3. Dans chacun des programmes suivants chaque appel de `rand` retourne, *indépendamment* des autres appels et de l'environnement, une v.a. uniformément répartie dans l'intervalle *réel* $[0, 1]$.

• **P1** : `X=rand()+2*rand()`

• **P2** : `X=3*rand()`

• **P3** : `X=rand()+rand()+rand()`

(+ et * sont interprétés comme l'addition et la multiplication des réels.)

1. Dire et justifier, sans faire le calcul, pour chaque couple de programmes s'ils retournent la même v.a.
2. Donner la densité de la v.a. X retournée par **P1** ; elle a une expression simple dans chacun des intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$ et $[2, 3]$ et s'annule en dehors de ceux-ci.
3. Calculer l'espérance de X retournée par **P1**.