

Indiquez votre code d'anonymat : No :

Barème

Questions : 5 points

Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points

Questions

(Justifier vos réponses)

1. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Peut-on déduire de $Pr(A/B) = 2Pr(A)$ que $Pr(B/A) = 2Pr(B)$?
2. Pour deux événements A et B , avec B de probabilité non nulle, peut-on confirmer que $Pr(A) = Pr(A/B) + Pr(A/\bar{B})$?
3. Soient X et Y deux v.a. exponentielles indépendantes de paramètres α et β respectivement. Que peut-on dire de la v.a. $Z = \min\{X, Y\}$?
4. L'erreur de la mesure d'une certaine grandeur en physique est une v.a. qui suit une loi normale de type $\mathcal{N}(0, 0.3)$ (i.e. d'espérance 0 et d'écart-type 0.3). Avec quelle probabilité peut-on confirmer que la valeur absolue de l'erreur de la mesure ne dépasse pas de 0.45 ?
5. Dans la question précédente, on répète indépendamment 10 fois l'expérience et l'on identifie la valeur de la grandeur avec la valeur moyenne des 10 résultats obtenus. Avec quelle probabilité peut-on confirmer que la valeur absolue de l'erreur ne dépasse pas de 0.09 ?

Choisissez 3 exercices parmi les 4 exercices proposés

Exercice 1. On considère une grille carrée de 9 cases, rangées en 3 lignes et 3 colonnes. On place au hasard 3 jetons indiscernables sur la grille, un au plus par case. À tout rangement respectant cette contrainte, on associe la même probabilité.

1. Trouver le cardinal de l'espace Ω des événements élémentaires.
2. Quelle est la probabilité d'avoir placé un jeton sur chaque ligne ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir placé un jeton par ligne et par colonne ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir placé les 3 jetons sur la même ligne ?
5. Quelle est l'espérance du nombre de lignes contenant au moins un jeton ?

Exercice 2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + \frac{xy}{2}) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Déterminer la densité marginale de X et celle de Y . Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $Pr(X > Y)$.

Exercice 3. Une enquête réalisée auprès des clients fréquentant un grand magasin montre que, une fois entrés dans l'établissement, ils font un acte d'achat avec une probabilité de 40%. Sur 1000 clients entrés dans le magasin, on désigne par X le nombre de ceux qui ont effectivement acheté quelques articles.

1. Quelle est la distribution de la v.a. X ? Calculer $\mathbb{E}X$ et $\mathbb{V}X$. Écrire l'expression de $Pr(X = 400)$.
2. On utilise l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. Déterminer les paramètres de la loi normale approchant la distribution de X .
3. Utiliser l'approximation précédente, pour trouver les valeurs approximatives de $Pr(X < 300)$, $Pr(X \geq 500)$ et $Pr(X = 400)$.

Exercice 4. Supposons que :

- `rand` retourne une v.a. uniformément répartie dans l'intervalle *réel* $[0, 1]$
- `floor` retourne la valeur entière par défaut
- `round` retourne la valeur entière arrondie (l'entier le plus proche par défaut ou par excès)
- `tan` retourne la tangente
- `pi` retourne π .

Quelle distribution a la v.a. X , à la sortie de chacun des algorithmes suivants ?

1. `X=floor(3*rand)`
2. `X=round(4*rand)`
3. `X=tan((pi/2)*rand)`

Justifier vos réponses.