

Indiquez votre code d'anonymat : No :

Barème

Questions : 5 points

Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points

Questions

(Justifier vos réponses)

1. Si A et B sont indépendants, peut-on confirmer que A et \bar{B} le sont aussi ?
2. Soit $Pr(B/A) < Pr(B)$, où les événements A et B sont supposés être de probabilité non nulle. Que peut-on dire de $Pr(A/B)$ et $Pr(A)$?
3. Peut-on déduire de $Pr(B/A) = Pr(B/\bar{A})$, où A et \bar{A} sont supposés de probabilité non nulle, que A et B sont indépendants ?
4. Soient X et Y deux v.a. normales indépendantes de types $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ respectivement. Pour quelles valeurs des facteurs réels α et β la v.a. $\alpha X + \beta Y$ devient une v.a. normale centrée-réduite ?

Choisissez 3 exercices parmi les 4 exercices proposés

Exercice 1. La distribution conjointe des v.a. X et Y est donnée dans le tableau suivant :

		Y			
		-1	0	1	2
X	-1	0	1/36	1/6	1/12
	0	1/18	0	1/18	0
	1	0	1/36	1/6	1/12
	2	1/12	0	1/12	1/6

1. Trouver $Pr(X \geq 1 \cap Y \leq 0)$.
2. Quelle est la probabilité conditionnelle pour que $Y \leq 0$ sachant que $X = 2$?
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Donner la distribution de $Z = XY$.

Exercice 2. On tire indépendamment deux v.a. X et Y uniformément dans l'intervalle réel $[a, b]$, où $a < b$. Posons $Z = \min\{X, Y\}$.

1. Calculer $Pr(Z > z)$ pour $z \in [a, b]$.
2. En déduire la fonction de répartition et la densité de la v.a. Z .

Exercice 3. Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet à 3 lettres. Soit r un entier positif fixé. On effectue une suite de tirages (avec remises) uniformes de lettres dans A , jusqu'à ce qu'on obtienne r occurrences de "c". L'événement associé au tirage est alors le mot tiré et l'espace des événements sera donc :

$$\Omega = \{w \in A^* \mid |w|_c = r \text{ et } w \text{ se termine par une occurrence de "c"}\}.$$

On rappelle que $|w|_c$ est le nombre d'occurrences de "c" dans w et que $|w|$ est la longueur de w .

1. Pour $r = 2$, énumérer les mots de longueur 3 de Ω . Quelle est la probabilité de ce tirage ?
2. Montrer que l'on peut munir Ω d'une mesure de probabilité : $\forall w \in \Omega, Pr(w) = \text{probabilité du tirage de } w$, avec $\sum_{w \in \Omega} Pr(w) = 1$.
3. On définit la v.a. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, par $X(w) = |w|$. Calculer $Pr(X = n)$, pour $n = r, r + 1, r + 2, \dots$
4. Trouver la fonction génératrice de X (la méthode conseillée est l'utilisation du résultat bien connu sur la f.g. de la somme des v.a. indépendantes).

Exercice 4. Soit X une v.a. réelle uniformément répartie dans l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$, où θ_1 et θ_2 , sont deux paramètres donnés (on suppose $\theta_1 < \theta_2$).

1. Donner la densité de la v.a. X et calculer son espérance et sa variance.
2. Écrire la densité conjointe $f_{\theta_1, \theta_2}(x_1, \dots, x_n)$ de (X_1, \dots, X_n) , où X_1, \dots, X_n sont n réalisations indépendantes de X .
3. Trouver les valeurs de θ_1 et θ_2 qui maximisent $f_{\theta_1, \theta_2}(x_1, \dots, x_n)$, pour un vecteur (x_1, \dots, x_n) donné ; la solution est simple et ne nécessite pas de dérivation.