

Indiquez votre code d'anonymat : No :

### Barème

Questions : 6 points

Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points

### Questions

1. Quelle est la loi de la somme des trois v.a. indépendantes de types  $\mathcal{N}(2, 3)$ ,  $\mathcal{N}(-5, 2)$  et  $\mathcal{N}(4, 3)$  respectivement ? On rappelle que  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  représente la loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ .
2. Écrire la f.r. (fonction de répartition) de la v.a. associée au produit de tirages de deux dés équilibrés.
3. Quelle est la probabilité pour qu'une v.a. normale s'écarte d'au moins 4 fois son écart-type de son espérance ? Donner la valeur numérique.
4. Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes, admettant chacune une espérance et une variance. Écrire l'espérance et la variance de la v.a.  $4X - 3Y$  en fonction de celles de  $X$  et de  $Y$ .

Justifier vos réponses.

### Choisissez 3 exercices parmi les 4 exercices proposés

**Exercice 1.** On lance  $n$  dés équilibrés. À l'issue du premier lancer, on reprend les dés qui n'ont pas donné l'as. On procède alors à un second lancer avec les dés restants, et ainsi de suite jusqu'à obtenir  $n$  as.

Soit  $X_n$ , la v. a. représentant le nombre de jets nécessaires pour obtenir  $n$  as.

1. Pour un dé, calculer la probabilité pour que  $X_1$  soit égale à  $k$ .
2. Calculer la probabilité pour que  $X_1$  soit inférieure ou égale à  $k$ .
3. Quelle est la probabilité pour que  $X_n$  soit inférieure ou égale à  $k$  ?
4. Quelle est la probabilité que l'on obtienne les  $n$  as au  $k^{ieme}$  lancer ?

**Exercice 2.** Deux usines A et B proposent chacune un lot de pièces détachées. Le nombre de pièces défectueuses dans le lot pour chacune des usines est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre 5 pour A et de paramètre 8 pour B. On choisit une des usines avec la même probabilité  $\frac{1}{2}$  et l'on y achète le lot proposé.

1. Donner l'expression de probabilité pour que le nombre de pièces défectueuses dépasse 5.
2. Quelles sont l'espérance et la variance du nombre de pièces défectueuses ?

**Exercice 3.** Dans l'algorithme de *hachage avec essais uniformes* on dispose d'une suite infinie  $h_1, h_2, \dots$  de fonctions de hachage, associant chacune à une clé une valeur dans  $\{1, 2, \dots, m\}$  dans la table de hachage. Les  $h_i(x)$  sont supposées être indépendantes et uniformément réparties dans  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Ces fonctions sont essayées l'une après l'autre jusqu'à ce qu'on trouve une case libre dans la table. Soit  $p_k$  la probabilité pour que  $k$  essais soient effectués pour trouver une case libre, en supposant que la table contient déjà  $n < m$  éléments.

1. Montrer que  $p_k = \alpha^{k-1}(1 - \alpha)$ , où  $\alpha = \frac{n}{m}$  est le taux d'occupation.
2. Donner la fonction génératrice et l'espérance du nombre d'essais pour insérer un élément.
3. Quel est le nombre moyen d'essais dans une recherche négative ?

**Exercice 4.** Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\lambda}_n(x_1, \dots, x_n)$  pour le paramètre  $\lambda$  d'une v.a. exponentielle de densité  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

1. Un échantillon de 100 lampes électriques a été choisi au hasard pour en tester la durée de vie. Une durée totale de 88 912 heures a été observée. En supposant que la durée de vie est une v.a. qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , donner l'estimateur du maximum de vraisemblance pour  $\lambda$ .
2. Pour  $\lambda = \frac{11}{10\,000}$ , quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une lampe soit entre 500 h et 1000 h (on ne demande pas la valeur numérique de cette probabilité) ?