

Indiquez votre code d'anonymat : No :

Barème

Questions : 6 points

Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points

Questions

1. Quelle est la loi de la somme des trois v.a. indépendantes de types $\mathcal{N}(2, 3)$, $\mathcal{N}(-5, 2)$ et $\mathcal{N}(4, 3)$ respectivement ? On rappelle que $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ représente la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ .
2. Écrire la f.r. (fonction de répartition) de la v.a. associée au produit de tirages de deux dés équilibrés.
3. Quelle est la probabilité pour qu'une v.a. normale s'écarte d'au moins 4 fois son écart-type de son espérance ? Donner la valeur numérique.
4. Soient X et Y deux v.a. indépendantes, admettant chacune une espérance et une variance. Écrire l'espérance et la variance de la v.a. $4X - 3Y$ en fonction de celles de X et de Y .

Justifier vos réponses.

Choisissez 3 exercices parmi les 4 exercices proposés

Exercice 1. On lance n dés équilibrés. À l'issue du premier lancer, on reprend les dés qui n'ont pas donné l'as. On procède alors à un second lancer avec les dés restants, et ainsi de suite jusqu'à obtenir n as.

Soit X_n , la v. a. représentant le nombre de jets nécessaires pour obtenir n as.

1. Pour un dé, calculer la probabilité pour que X_1 soit égale à k .
2. Calculer la probabilité pour que X_1 soit inférieure ou égale à k .
3. Quelle est la probabilité pour que X_n soit inférieure ou égale à k ?
4. Quelle est la probabilité que l'on obtienne les n as au $k^{ième}$ lancer ?

Exercice 2. Deux usines A et B proposent chacune un lot de pièces détachées. Le nombre de pièces défectueuses dans le lot pour chacune des usines est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre 5 pour A et de paramètre 8 pour B. On choisit une des usines avec la même probabilité $\frac{1}{2}$ et l'on y achète le lot proposé.

1. Donner l'expression de probabilité pour que le nombre de pièces défectueuses dépasse 5.
2. Quelles sont l'espérance et la variance du nombre de pièces défectueuses ?

Exercice 3. Dans l'algorithme de *hachage avec essais uniformes* on dispose d'une suite infinie h_1, h_2, \dots de fonctions de hachage, associant chacune à une clé une valeur dans $\{1, 2, \dots, m\}$ dans la table de hachage. Les $h_i(x)$ sont supposées être indépendantes et uniformément réparties dans $\{1, 2, \dots, m\}$. Ces fonctions sont essayées l'une après l'autre jusqu'à ce qu'on trouve une case libre dans la table. Soit p_k la probabilité pour que k essais soient effectués pour trouver une case libre, en supposant que la table contient déjà $n < m$ éléments.

1. Montrer que $p_k = \alpha^{k-1}(1 - \alpha)$, où $\alpha = \frac{n}{m}$ est le taux d'occupation.
2. Donner la fonction génératrice et l'espérance du nombre d'essais pour insérer un élément.
3. Quel est le nombre moyen d'essais dans une recherche négative ?

Exercice 4. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_n(x_1, \dots, x_n)$ pour le paramètre λ d'une v.a. exponentielle de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

1. Un échantillon de 100 lampes électriques a été choisi au hasard pour en tester la durée de vie. Une durée totale de 88 912 heures a été observée. En supposant que la durée de vie est une v.a. qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , donner l'estimateur du maximum de vraisemblance pour λ .
2. Pour $\lambda = \frac{11}{10\,000}$, quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une lampe soit entre 500 h et 1000 h (on ne demande pas la valeur numérique de cette probabilité) ?