



Département Licence

Année universitaire 2007/2008 Session 1 d'automne  
Parcours : CSB3 UE : INF162  
Épreuve : Probabilités pour l'Informatique  
Date : 4 Janvier 2008 Heure : 8h30 Durée : 1h30  
Documents : autorisés  
Épreuve de Nasser Saheb

Indiquez votre code d'anonymat : No :

### Barème

Questions : 6 points

Exercices 1, 2, 3 : chacun 7 points

### Questions

(Justifier vos réponses)

1. Soient  $A$  et  $B$  deux événements de probabilité non nulle. Si  $Pr(A \cap B) > Pr(A)Pr(B)$ , que peut-on dire de  $Pr(A/B)$  et de  $Pr(B/A)$  ?
2. Deux événements exclusifs  $A$  et  $B$  (i.e.  $A \cap B = \emptyset$ ) peuvent-ils être indépendants ?
3. Soient  $A$  et  $B$  deux événements associés à une expérience aléatoire, nous avons  $Pr(A) = 0.30$ ,  $Pr(A \cup B) = 0.70$  et  $Pr(B) = p$ . Déterminer  $p$  dans chacun des trois cas suivants :
  - $A$  et  $B$  sont disjoints.
  - $A$  et  $B$  sont indépendants.
  - On a  $Pr(A \cap \bar{B}) = 0.20$ .
  - Dans ce dernier cas (c'est-à-dire  $Pr(A \cap \bar{B}) = 0.20$ ),  $A$  et  $B$  sont-ils disjoints ? indépendants ?

### Solution

1. Puisque  $Pr(A \cap B) = Pr(A) \times Pr(B/A)$ , on en déduit  $Pr(B/A) > Pr(B)$  (i.e.  $A$  "favorise"  $B$ ). De même on a  $Pr(A/B) > Pr(A)$
2. Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, on a  $Pr(A \cap B) = Pr(A) \times Pr(B)$ . Mais alors, s'ils sont de plus exclusifs,  $Pr(A \cap B) = 0$  et, donc, au moins l'un d'eux doit être de probabilité nulle.
3.
  - Si  $A$  et  $B$  sont disjoints, on a  $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$  et, donc,  $0.7 = 0.3 + p$ . On en déduit  $p = 0.4$ .
  - Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, on a  $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A) \times Pr(B)$ . Donc  $0.7 = 0.3 + p - p \times 0.3$ . D'où  $p = 4/7$ .
  - Si  $Pr(A \cap \bar{B}) = 0.20$ , alors  $Pr(A \cap B) = Pr(A) - Pr(A \cap \bar{B}) = 0.1$ . On en déduit  $0.7 = 0.3 + p - 0.1$ . D'où  $p = 0.5$ .
  - Dans le dernier cas  $A$  et  $B$  ne peuvent pas être disjoints, puisque  $Pr(A \cup B) = 0.1 \neq 0$ . Ils ne peuvent pas être indépendants, non plus, puisque  $Pr(A \cap B) = 0.1$  alors que  $Pr(A) \times Pr(B) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$ .

## Choisissez 2 exercices parmi les 3 proposés

**Exercice 1.** Soit l'alphabet  $A = \{a, b\}$ . On tire un mot  $w$  de longueur  $n \geq 1$  sur  $A$ ; tous les  $2^n$  mots ont la même probabilité d'être tirés.

1. Quelle est la probabilité pour que  $w$  soit palindrome ? (**Rappel** : Un mot est dit *palindrome* s'il est identique à son image miroir.) Vous pouvez considérer deux cas suivant la parité de  $n$ .
2. On répète l'expérience de tirage des mots de longueur  $n$ . Combien de fois faut-il répéter l'expérience pour que l'espérance du nombre de mots palindromes obtenus soit au moins égale à  $n$  ?
3. Quelle est la probabilité pour que  $||w|_a - |w|_b| \leq 1$  (les nombres d'occurrences de  $a$  et celles de  $b$  dans  $w$  diffèrent au plus d'une unité) ?
4. Quelle est l'espérance du nombre d'occurrences de  $abb$  ?

### Solution

1. Soit  $n$  pair,  $n = 2k$ . Pour le tirage d'un mot palindrome, les  $k$  premières lettres tirées peuvent être quelconques, mais la seconde moitié de  $w$  ne peut être que la copie de la première moitié tirée dans le sens inverse. Donc  $pr(w \text{ palindrome}) = \frac{1}{2^k}$ . Pour  $n$  impair,  $n = 2k + 1$ , par un raisonnement similaire, nous aurons  $Pr(w \text{ palindrome}) = \frac{1}{2^k}$ . Donc, dans tous les cas, la probabilité de tirage d'un mot  $w$  palindrome sur l'alphabet  $A$  vaut  $2^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  ( $\lfloor x \rfloor$  est la valeur entière par défaut de  $x$ ).
2. Soit  $N$  le nombre de répétitions. L'espérance du nombre de palindromes est  $N \times 2^{-\lfloor n/2 \rfloor}$ . Pour qu'elle vaille au moins  $n$ , on doit avoir  $N \geq n 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ .
3. Pour  $n = 2k$ , la probabilité recherchée est celle de tirer  $k$  occurrences de  $a$  et  $k$  occurrences de  $b$  (dans un ordre quelconque), c'est-à-dire :

$$\frac{\binom{k}{2k}}{2^n} = \frac{(2k)!}{k! k! 4^k}.$$

Pour  $n = 2k + 1$ , la probabilité recherchée est celle de tirer soit  $k$  occurrences de  $a$  et  $k + 1$  occurrences de  $b$  soit  $k + 1$  occurrences de  $a$  et  $k$  occurrences de  $b$ . Ces deux événements sont disjoints et de même probabilité. La probabilité recherchée vaut donc :

$$2 \times \frac{(2k + 1)!}{k! (k + 1)! 2^n} = \frac{(2k + 1)!}{k! (k + 1)! 4^k}.$$

4. On suppose  $n \geq 3$ . Soit  $i$ ,  $1 \leq i \leq n - 2$ , une position dans  $w$ . La probabilité d'avoir une occurrence de  $abb$  à partir de cette position est de  $1/8$ . On en déduit l'espérance du nombre d'occurrences de  $abb$  :  $1/8 \times (n - 2) = \frac{n-2}{8}$ .

**Exercice 2.** Les demandes  $X_1, \dots, X_6$  pour un hebdomadaire dans les journées de lundi à samedi peuvent être assimilées aux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres 30, 20, 10, 10, 5, 5 respectivement. Soit  $X = \sum_{i=1}^6 X_i$  le nombre total de numéros vendus dans la semaine.

1. Déterminer la loi de la v.a.  $X$ . Quelle est sa fonction génératrice ?
2. En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .
3. On choisit un jour de la semaine de lundi à samedi, en supposant que, *a priori* tous les 6 jours ont la même chance d'être choisis. Quelle est la probabilité conditionnelle (*a posteriori*) qu'il s'agisse d'un lundi, sachant que 40 numéros de l'hebdomadaire sont vendus ? (Il suffit d'écrire l'expression de probabilité et non la valeur numérique).

### Solution

1. La somme des v.a. indépendantes de Poisson est une v.a. de Poisson dont le paramètre est la somme des paramètres. Donc  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 30 + 20 + 10 + 10 + 5 + 5 = 80$ . La f.g. de  $X$  est  $G(z) = e^{-\lambda(1-z)} = e^{-80(1-z)}$ .
2. En dérivant la f.g. de  $X$ , on obtient :  $G'(z) = 80e^{-80(1-z)}$  et  $\mathbb{E}X = G'(1) = 80$ . La variance est obtenue en retranchant le carré de  $\mathbb{E}X = G'(1)$  de  $G''(1) + G'(1)$ . Nous avons :  $\mathbb{V}X = 80^2 + 80 - 80^2 = 80$ . Évidemment, on aurait pu utiliser le fait que l'espérance et la variance d'une distribution de Poisson sont égales (toutes les deux) au paramètre de la loi.
3. Désignons par  $Pr(Lundi/X_1 = 40)$  cette probabilité conditionnelle. D'après le théorème de Bayes, on a :

$$\begin{aligned}
 Pr(Lundi/X_1 = 40) &= \frac{Pr(Lundi) \times Pr(X_1 = 40/Lundi)}{Pr(X_1 = 40)} \\
 &= \frac{\frac{1}{6} \times e^{-30} \frac{30^{40}}{40!}}{\frac{1}{6} \times [e^{-30} \frac{30^{40}}{40!} + e^{-20} \frac{20^{40}}{40!} + 2 e^{-10} \frac{10^{40}}{40!} + 2 e^{-5} \frac{5^{40}}{40!}]}{e^{-30} 30^{40}} \\
 &= \frac{e^{-30} 30^{40}}{e^{-30} 30^{40} + e^{-20} 20^{40} + 2e^{-10} 10^{40} + 2e^{-5} 5^{40}}.
 \end{aligned}$$

**Exercice 3.** Soit  $X$  une v.a. continue de densité :

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Quelle est la valeur de  $a$  pour que  $f$  soit vraiment une densité ? Dans la suite, on suppose que  $a$  prend cette valeur.
2. Calculer la f.r. (fonction de répartition) de  $X$ .
3. Calculer l'espérance de  $X$ .
4. Quelle est la probabilité conditionnelle  $Pr(X > \frac{3}{4} / X > \frac{1}{2})$  ?

### Solution

1. Pour que  $f(x)$  soit une densité de probabilité il faut que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ . On en déduit  $[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}ax^3]_0^1 = 1$ . Et donc  $a = 6$ .
2. Soit  $F(t)$  la f.r. de  $X$ . Un calcul simple montre que :

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 3t^2 - 2t^3 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

3. L'espérance de  $X$  vaut  $\int_0^1 6x^2(1-x)dx = \frac{6}{3} - \frac{6}{4} = 0.5$ .

4. La probabilité conditionnelle recherchée vaut  $\frac{Pr(X > \frac{3}{4})}{Pr(X > \frac{1}{2})} = \frac{1-F(3/4)}{1-F(1/2)} = \frac{1-3(3/4)^2+2(3/4)^3}{1-3(1/2)^2+2(1/2)^3} = 0.3125$ .