

Indiquez votre code d'anonymat : No :

Barème

Questions : 6 points

Exercices 1, 2, 3 : chacun 7 points

Questions

(Justifier vos réponses)

1. Dans un lancer d'un dé équilibré, les événements A , B et C sont définis par :

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 4, 5\} \text{ et } C = \{1, 2, 4, 6\}.$$

Montrer que A et C d'une part et B et C d'autre part sont indépendants. Peut-on en déduire que $A \cup B$ et C sont aussi indépendants ?

2. On suppose de nouveau que A et C d'une part et B et C d'autre part sont indépendants. Et cette fois, on introduit l'hypothèse supplémentaire que A et B sont disjoints. Peut-on alors affirmer que $A \cup B$ et C sont indépendants ?
3. Soit X_1, X_2, \dots, X_k une suite de $k > 0$ v.a. indépendantes normales et soit b une constante réelle. On suppose que chaque v.a. X_i est de type $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ (i.e. normale d'espérance μ_i et d'écart-type σ_i). Quelle est distribution de la v.a. $Y = \sum_{1 \leq i \leq k} X_i + b$?

Solution

1. On a $Pr(A) = \frac{1}{2}$, $Pr(B) = \frac{1}{2}$, et $Pr(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Par ailleurs $A \cap C = \{1, 2\}$ et $B \cap C = \{1, 4\}$ et, donc, $Pr(A \cap C) = \frac{1}{3}$ et $Pr(B \cap C) = \frac{1}{3}$. On en déduit facilement $Pr(A \cap C) = Pr(A)Pr(C)$ et $Pr(B \cap C) = Pr(B)Pr(C)$. D'où l'indépendance A et C et celle de B et C .
Mais $A \cup B$ et C ne sont pas indépendants. En effet, on a $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 4\}$ et sa probabilité vaut $1/2$. Or cette probabilité est différente de $Pr(A \cup B) \times Pr(C) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$.
2. Si l'on introduit l'hypothèse supplémentaire que A et B sont disjoints (ce n'est plus le cas de l'exemple précédent, puisque la face 1 se trouve dans l'intersection), on a :

$$Pr(A \cup B) \times Pr(C) = [Pr(A) + Pr(B)] \times Pr(C) = Pr(A)Pr(C) + Pr(B)Pr(C).$$

L'indépendance de A et C et celle de B et C permettent de mettre cette dernière expression sous la forme :

$$Pr(A)Pr(C) + Pr(B)Pr(C) = Pr(A \cap C) + Pr(B \cap C) = Pr((A \cap C) \cup (B \cap C)) = Pr((A \cup B) \cap C).$$

D'où, l'indépendance de $A \cup B$ et C .

de type $\mathcal{N}(\sum_{1 \leq i \leq k} \mu_i, \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq k} \sigma_i^2})$. Finalement le rajout de la constante b ne fait qu'ajouter la constante à l'espérance de la v.a. somme. Donc, la v.a. Y est de type $\mathcal{N}(\sum_{1 \leq i \leq k} \mu_i + b, \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq k} \sigma_i^2})$.

Choisissez 2 exercices parmi les 3 exercices proposés

Exercice 1. Soit X une v.a. discrète, prenant des valeurs entières positives, avec les probabilités :

$$P(X = n) = np^2(1-p)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

avec $0 < p < 1$.

1. Prouver que P est bien une distribution de probabilité. On rappelle que, pour x de valeur absolue strictement inférieure à 1, on a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
2. Calculer la fonction génératrice de X .
3. En déduire l'espérance de X .

Solution

1. En dérivant l'équation $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ par rapport à x , on remarque qu'on a : $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Nous avons par ailleurs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} np^2(1-p)^{n-1} = p^2 \sum_{n=1}^{\infty} np^2(1-p)^{n-1}.$$

En prenant $x = 1 - p$, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) = p^2 \times \frac{1}{(1 - (1-p))^2} = 1.$$

2. La fonction génératrice de X est donnée par :

$$G(z) = p^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} z^n = zp^2 \sum_{n=1}^{\infty} n[(1-p)z]^{n-1}.$$

La somme à calculer est encore de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ avec $x = (1-p)z$ et, donc :

$$G(z) = \frac{p^2 z}{[1 - (1-p)z]^2} = \frac{p^2 z}{(1 - qz)^2},$$

avec $q = 1 - p$.

3. Pour faciliter le calcul de la dérivée, on écrit $G(z) = p^2 z(1 - qz)^{-2}$. On a alors :

$$G'(z) = p^2(1 - qz)^{-2} + 2p^2 qz(1 - qz)^{-3}.$$

En posant $z = 1$ dans $G'(z)$, on obtient l'espérance de X :

$$\mathbb{E}X = G'(1) = p^2(1 - q)^{-2} + 2p^2 q(1 - q)^{-3} = 1 + \frac{2q}{p}.$$

$$f(t) = \begin{cases} ct^2(100-t)^2 & \text{si } t \in [0, 100] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Calculer l'espérance de T .
3. Quelle est la probabilité pour qu'un individu ait une durée de vie entre 50 et 80 ans ?

Solution

1. Nous avons $f(t) = c(10000t^2 - 200t^3 + t^4)$. On en déduit :

$$\int_0^{100} f(t)dt = c [10000t^3/3 - 50t^4 + t^5/5]_0^{100} = c(10^{10}/3 - 10^{10}/2 + 10^{10}/5) = 10^{10} \times c \times \frac{1}{30}.$$

Pour que cette intégrale vaille 1, il faut que $c = 3 \times 10^{-9}$. Dans la suite c aura cette valeur.

2. Nous avons :

$$\mathbb{E}T = \int_0^{100} tf(t)dt = 3 \times 10^{-9} [10000t^4/4 - 40t^5 + t^6/6]_0^{100} = 3 \times 10^{-9} \times 10^{12} (1/4 - 2/5 + 1/6) = 50.$$

3. La probabilité pour avoir une durée de vie dans l'intervalle $[50, 80]$ vaut :

$$Pr(50 < T \leq 80) = \int_{50}^{80} f(t)dt = c [10000t^3/3 - 50t^4 + t^5/5]_{50}^{80} \approx 0.44208.$$

Exercice 3. Dans chacun des programmes suivants chaque appel de `rand` retourne, *indépendamment* des autres appels et de l'environnement, une v.a. uniformément répartie dans l'intervalle *réel* $[0, 1]$.

- **P1** : `X=rand()+2*rand()`
- **P2** : `X=3*rand()`
- **P3** : `X=rand()+rand()+rand()`

(+ et * sont interprétés comme l'addition et la multiplication des réels.)

1. Dire et justifier, sans faire le calcul, pour chaque couple de programmes s'ils retournent la même v.a.
2. Donner la densité de la v.a. **X** retournée par **P1** ; elle a une expression simple dans chacun des intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$ et $[2, 3]$ et s'annule en dehors de ceux-ci.
3. Calculer l'espérance de **X** retournée par **P1**.

Solution

1. Les trois programmes renvoient des variables aléatoires *distinctes*. En effet, si Y est une v.a., la somme de deux occurrences *indépendantes* de Y *n'est pas en général identique* à la v.a. $2Y$. Notons que cela *ne prouve pas* que les trois v.a. sont différentes ; le raisonnement met en évidence le fait qu'elles sont *définies différemment*.
2. Pour le programme **P1**, la v.a. **X** est la somme de deux v.a. indépendantes, la première étant uniformément répartie dans $[0, 1]$ et la seconde uniformément répartie dans $[0, 2]$. Ces deux v.a. sont de densités $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ et $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,2]}(x)$ respectivement. D'après une proposition sur la densité de la somme de deux v.a. indépendantes (cf. cours9, page 10), **X** est de densité :

$$f_{\mathbf{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[0,2]}(z-x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx.$$

L'expression à intégrer vaut 1, ssi $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq z-x \leq 2$. Sinon elle vaut 0. Mais z prend des valeurs dans $[0, 3]$ et, suivant sa valeur, on a un des cas suivants :

- Pour $0 \leq z \leq 1$, les inégalités sont satisfaites ssi $0 \leq x \leq z$. Donc la densité vaut $f_{\mathbf{X}}(z) = \frac{1}{2} [x]_0^z = \frac{z}{2}$.

- Pour $2 \leq z \leq 3$, les inégalités sont satisfaites ssi $z - 2 \leq x \leq 1$. Donc la densité vaut $f_X(z) = \frac{1}{2} [x]_{z-2}^1 = \frac{1}{2} - \frac{z-2}{2} = \frac{3}{2} - \frac{z}{2}$.
- En dehors de ces 3 intervalles, la densité s'annule.

3. On peut calculer l'espérance de X par la méthode standard en faisant la somme des intégrales de $z f_X(z)$ sur les 3 intervalles. Le résultat sera $3/2$. Une méthode beaucoup plus simple est de multiplier l'espérance de la v.a. uniformément réparties dans $[0,1]$, i.e. $1/2$, par 3. En effet X est la somme de 3 v.a. de ce type et l'espérance de la somme est la somme des espérances (que les v.a. soient indépendantes ou pas). Puisque ce dernier raisonnement s'applique aux autres programmes, on en déduit que l'espérance de X dans chacun des trois programmes vaut $3/2$.