

Indiquez votre code d'anonymat : No :

Barème

Questions : 5 points

Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points

Questions

(Justifier vos réponses)

1. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Peut-on déduire de $Pr(A/B) = 2Pr(A)$ que $Pr(B/A) = 2Pr(B)$?
2. Pour deux événements A et B , avec B de probabilité non nulle, peut-on affirmer que $Pr(A) = Pr(A/B) + Pr(A/\bar{B})$?
3. Soient X et Y deux v.a. exponentielles indépendantes de paramètres α et β respectivement. Que peut-on dire de la v.a. $Z = \min\{X, Y\}$?
4. L'erreur de la mesure d'une certaine grandeur en physique est une v.a. qui suit une loi normale de type $\mathcal{N}(0, 0.3)$ (i.e. d'espérance 0 et d'écart-type 0.3). Avec quelle probabilité peut-on confirmer que la valeur absolue de l'erreur de la mesure ne dépasse pas de 0.45 ?
5. Dans la question précédente, on répète indépendamment 10 fois l'expérience et l'on identifie la valeur de la grandeur avec la valeur moyenne des 10 résultats obtenus. Avec quelle probabilité peut-on confirmer que la valeur absolue de l'erreur ne dépasse pas de 0.09 ?

Solution

1. Oui. En effet :

$$Pr(B/A) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(A)} = \frac{Pr(B)Pr(A/B)}{Pr(A)} = 2Pr(B).$$

2. Non. La relation correcte est $Pr(A) = Pr(B)Pr(A/B) + Pr(\bar{B})Pr(A/\bar{B})$.

3. La v.a. Z suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha + \beta$. En effet :

$$Pr(Z > z) = Pr(X > z \cap Y > z) = e^{-\alpha z} e^{-\beta z} = e^{-(\alpha+\beta)z}.$$

D'où :

$$F_Z(z) = 1 - Pr(Z > z) = 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}.$$

4. Soit X l'erreur de la mesure effectuée. La v.a. $\frac{X-0}{0.3}$ suit une loi normale centrée-réduite. Par ailleurs, nous avons $Pr(|X| \leq 0.45) = Pr(|\frac{X-0}{0.3}| \leq 1.5)$. En regardant dans la table de la loi normale centrée-réduite, nous obtiendrons alors $Pr(|X| \leq 0.45) \approx 1 - 2(1 - 0.9332) = 0.8664$.
5. Si Y désigne l'erreur de l'identification de la grandeur physique par la valeur moyenne des résultats, elle suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type $0.3/\sqrt{10} \approx 0.095$. Nous aurons alors :

$$Pr(|Y| \leq 0.09) = Pr\left(\frac{|Y|}{0.095} \leq 0.95\right).$$

 Par conséquent, la probabilité recherchée vaut approximativement $1 - 2(1 - 0.83) = 0.66$.

Exercice 1. On considère une grille carrée de 9 cases, rangées en 3 lignes et 3 colonnes. On place au hasard 3 jetons indiscernables sur la grille, un au plus par case. À tout placement de 3 jetons respectant cette contrainte, on associe la même probabilité.

1. Trouver le cardinal de l'espace Ω des événements élémentaires.
2. Quelle est la probabilité d'avoir placé un jeton sur chaque ligne ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir placé un jeton et un seul par ligne et par colonne ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir placé les 3 jetons sur la même ligne ?
5. Quelle est l'espérance du nombre de lignes contenant au moins un jeton ?

Solution

1. Le cardinal recherché est le nombre de choix de 3 cases parmi 9 cases. Il vaut donc C_9^3 (ou $\binom{9}{3}$); ce qui est égal à $\frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$.
2. Le nombre d'éléments de Ω favorables à l'événement est le nombre de façons de choisir une case sur chaque ligne et, donc, 27. D'où la probabilité de l'événement vaut $\frac{27}{84} = \frac{9}{28}$. Un raisonnement direct, fondé sur les placements successifs des 3 jetons aboutit au même résultat.
3. Le nombre de cas favorables vaut $3 \times 2 \times 1 = 6$. En effet pour la première ligne il y a 3 choix, pour la deuxième 2 et pour la troisième il y a un seul. Donc sa probabilité est $\frac{6}{84} = \frac{1}{14}$.
4. Il y a 3 élément de Ω qui correspondent à cet événement (le choix de ligne). Sa probabilité vaut donc $\frac{3}{84} = \frac{1}{28}$.
5. Nous avons vu ci-dessus que le nombre de lignes occupées vaut 1 avec la probabilité $1/28$ et 3 avec la probabilité $9/28$. D'où la probabilité de 2 lignes occupées vaut $1 - (\frac{1}{28} + \frac{9}{28}) = \frac{18}{28}$. On en déduit l'espérance du nombre de lignes occupées $\mathbb{E}X = \frac{1 \times 1 + 2 \times 18 + 3 \times 9}{28} = \frac{16}{7}$.

Exercice 2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c .
2. Déterminer la densité marginale de X et celle de Y . Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $Pr(X > Y)$.

Solution

1. Pour que l'application $f_{X,Y}$ soit une densité, il faut que son intégrale sur \mathbb{R}^2 vaille 1. Donc on doit avoir :

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 c \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dx \right) dy = 1.$$

On en déduit $c \times \frac{7}{6} = 1$. D'où $c = \frac{6}{7}$.

2. La densité marginale de X vaut :

$$F_X(x) = \frac{6}{7} \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dy = \frac{6}{7} (2x^2 + x), \quad x \in [0, 1].$$

De même, celle de Y est égale à :

$$F_Y(y) = \frac{6}{7} \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dx = \frac{6}{7} \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{4} \right), \quad y \in [0, 2].$$

X et Y ne sont pas indépendantes, puisque la densité conjointe n'est pas le produit des densités marginales.

$$Pr(X > Y) = \int \int_{x>y} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

D'où :

$$Pr(X > Y) = \frac{6}{7} \int_0^1 \left(\int_0^x (x^2 + \frac{xy}{2}) dy \right) dx = \frac{6}{7} \times \frac{5}{16} = \frac{30}{112}.$$

Exercice 3. Une enquête réalisée auprès des clients fréquentant un grand magasin montre que, une fois entrés dans l'établissement, ils font un acte d'achat avec une probabilité de 40%. Sur 1000 clients entrés dans le magasin, on désigne par X le nombre de ceux qui ont effectivement acheté quelques articles.

1. Quelle est la distribution de la v.a. X ? Calculer $\mathbb{E}X$ et $\mathbb{V}X$. Écrire l'expression de $Pr(X = 400)$.
2. On utilise l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. Déterminer les paramètres de la loi normale approchant la distribution de X .
3. Utiliser l'approximation précédente pour trouver respectivement les valeurs approximatives de $Pr(X < 300)$, $Pr(X \geq 500)$ et $Pr(X = 400)$.

Solution

1. La v.a. suit une loi binomiale de paramètres 0.4 et 1000 :

$$Pr(X = k) = \binom{1000}{k} \times 0.4^k \times 0.6^{1000-k} = \frac{1000!}{k!(1000-k)!} \times 0.4^k \times 0.6^{1000-k}.$$

Et, en particulier :

$$Pr(X = 400) = \frac{1000!}{400!600!} \times 0.4^{400} \times 0.6^{600}.$$

L'espérance de X vaut $1000 \times 0.4 = 400$ et sa variance $1000 \times 0.4 \times 0.6 = 240$.

2. En vertu du théorème *central limite*, la loi binomiale a un comportement asymptotique normal. Dans ce cas précis, si nous identifions 1000 et infini, alors la v.a. $(X - 400)/\sqrt{240}$ suit une loi normale centrée-réduite. On peut donc identifier X par une v.a. normale d'espérance 400 et de variance 240.
3. Nous avons respectivement :

$$Pr(X < 300) = Pr\left(\frac{X - 400}{\sqrt{240}} < -6.45\right) \approx 0$$

$$Pr(X \geq 500) = Pr\left(\frac{X - 400}{\sqrt{240}} \geq 6.45\right) \approx 0$$

La probabilité pour que X soit égale à 400 vaut 0. En effet dans le cas des v.a. continue la probabilité pour que la v.a. prenne une valeur exacte donnée est nulle.

Exercice 4. Supposons que :

- `rand` retourne une v.a. uniformément répartie dans l'intervalle *réel* $[0, 1]$
- `floor` retourne la valeur entière par défaut
- `round` retourne la valeur entière arrondie (l'entier le plus proche par défaut ou par excès)
- `tan` retourne la tangente
- `pi` retourne π .

Quelle distribution a la v.a. X , à la sortie de chacun des 3 programmes suivants ?

1. `X=floor(3*rand)`
2. `X=round(4*rand)`
3. `X=tan((pi/2)*rand)`

Solution

1. La v.a. $3*\mathbf{rand}$ a une distribution uniforme dans l'intervalle réel $[0, 3]$. Sa valeur entière par défaut vaut 0 avec la probabilité $1/3$ (la probabilité qu'elle appartienne à $[0, 1)$), 1 avec la probabilité $1/3$ et 2 avec la probabilité $1/3$.
2. La v.a. $\mathbf{X}=\mathbf{round}(4*\mathbf{rand})$ vaut 0, ssi $4*\mathbf{rand}$ est dans l'intervalle $[0, 0.5[$. Elle vaut 1 si $4*\mathbf{rand}$ est dans l'intervalle $[0.5, 1.5[$, 2 si $4*\mathbf{rand}$ est dans l'intervalle $[1.5, 2.5[$, 3 si $4*\mathbf{rand}$ est dans l'intervalle $[2.5, 3.5[$ et 4 si $4*\mathbf{rand}$ est dans l'intervalle $[3.5, 4]$. Tenant compte de l'uniformité de $4*\mathbf{rand}$ dans $[0, 4]$, on a :

$$Pr(\mathbf{X} = 0) = Pr(\mathbf{X} = 4) = \frac{1}{8}, \quad Pr(\mathbf{X} = 1) = Pr(\mathbf{X} = 2) = Pr(\mathbf{X} = 3) = \frac{1}{4}.$$

3. En désignant par U la v.a. générée par l'appel de \mathbf{rand} , pour le troisième programme on a :

$$Pr(\mathbf{X} \leq x) = Pr(\mathbf{tg}(\pi/2 \times U) \leq x) = Pr(U \leq \frac{2\mathbf{Arctg}(x)}{\pi}) = \frac{2\mathbf{Arctg}(x)}{\pi}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^+.$$

C'est la f.r. de \mathbf{X} . Sa densité est obtenue en dérivant la f.r.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une distribution proche de celle de Cauchy.