

Indiquez votre code d'anonymat : No :

### Barème

Questions : 5 points

Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points

**NB** : Les calculs numériques suivants sont approximatifs

### Questions

1. Soit  $X$  une v.a. de type  $\mathcal{N}(10, 6)$  (i.e. normale d'espérance 10 et d'écart-type 6). Trouver les valeurs numériques de  $Pr(X \leq 13)$  et de  $Pr(4 \leq X \leq 16)$ .
2. On admet que le poids d'une personne adulte suit une loi normale de type  $\mathcal{N}(70, 7)$  (en kg). Avec quelle probabilité un groupe de 20 personnes montant dans un ascenseur ne dépassera pas la limite de sécurité, fixée à 1 500 kg? Donner la valeur numérique.
3. Dans un jeu à 2 joueurs, on lance 4 dés équilibrés. Si l'on obtient exactement deux faces supérieures ou égales à 4, le premier gagne la mise, sinon, c'est le deuxième qui l'empoché. Le jeu est-il équitable?
4. Disposant de réalisations d'une v.a.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , comment peut-on simuler une réalisation d'une v.a. suivant une loi du Khi-deux à  $k$  degrés de liberté?

Justifier vos réponses.

### Solution

1. La v.a.  $\frac{X-10}{6}$  est centrée-réduite. Et  $Pr(X \leq 13) = Pr(\frac{X-10}{6} \leq \frac{1}{2})$ . On trouve dans une table de loi normale la valeur 0.6915 pour cette probabilité. De façon similaire la probabilité, on a  $Pr(4 \leq X \leq 16) = Pr(-1 \leq \frac{X-10}{6} \leq 1) = 0.6826$ .
2. La somme des poids de 20 personnes suit une loi normale d'espérance de 1400 kg et d'écart-type de  $7\sqrt{20}$  kg. On a alors :

$$Pr(X \leq 1500) = Pr\left(\frac{X - 1400}{7\sqrt{20}} \leq \frac{100}{14\sqrt{5}}\right) + 0.99931.$$

3. Le jeu n'est pas équitable. En effet, la probabilité de gain pour le premier joueur vaut  $Pr(2 \text{ faces} \geq 4 \text{ et deux faces} < 4) = \binom{4}{2} \times (1/2)^4 = \frac{6}{16}$ , ce qui est inférieur à  $1/2$ .
4. La somme des carrés de  $k$  v.a. normales centrées-réduites indépendantes suit une loi du Khi-deux à  $k$  degrés de liberté. Il suffit donc de faire la somme des  $\frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$  pour une réalisation de  $X_1, \dots, X_k$  de la v.a. de type  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .

**Choisissez 3 exercices parmi les 4 exercices proposés**

que l'on utilisera par la suite. Si le résultat est pile, on choisit le dé  $A$ , sinon le dé  $B$ .

1. Montrer que les faces rouges et blanches ont la même probabilité lorsqu'on lance le dé choisi.
2. Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne une face rouge au troisième lancer, sachant que les résultats des deux premiers ont été rouges ?
3. Calculer la probabilité pour que le dé choisi soit  $A$ , sachant que les résultats de ses  $n$  lancers ont été rouges. Que vaut cette probabilité lorsque  $n$  tend vers l'infini ?

### Solution

1. On a  $Pr(\text{face blanche}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$ . On en déduit que les deux couleurs ont la même probabilité.
2. Désignons les événements d'obtention une face rouge au premier, deuxième et troisième lancers par  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  respectivement. On a :

$$Pr(R_3/R_2 \cap R_1) = \frac{Pr(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{Pr(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^3}{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

3. D'après la formule de Bayes, on a :

$$Pr(A \text{ } n \text{ lancers rouges}) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2^n}{2^n + 1}.$$

Cette probabilité tend vers 1, lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 2.** On admet que la quantité des précipitations en été suit une loi normale d'espérance  $\mu = 10$  litres/ $m^2$  et d'écart-type  $\sigma = 4$  litres/ $m^2$ . Pour un été de précipitations inférieures à 4 litres/ $m^2$ , l'état de sécheresse est décrété.

1. Quelle est la probabilité de l'état de sécheresse ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de sécheresse dans les 10 prochaines années ?
3. Écrire la fonction génératrice du nombre d'années consécutives sans sécheresse. Quelle est l'espérance de ce nombre ?

### Solution

1. On a  $Pr(X < 4) = Pr\left(\frac{X-10}{4} < -\frac{3}{2}\right) = 1 - 0.9332 = 0.0668$  (cf la table ).
2. On en déduit que la probabilité de 10 années sans sécheresse vaut approximativement  $0.9332^{10} = 0.5008957$ .
3. La distribution du nombre d'années consécutives sans sécheresse est géométrique :  
 $Pr(\text{exactement } k \text{ sans sécheresse}) = 0.9332^k \times 0.0668$ . La f.g. de ce nombre vaut  $\frac{0.0668}{1-0.9332z}$ .  
Son espérance se calcule soit en dérivant la f.g. soit directement. Elle vaut approximativement :  $\frac{0.9332}{0.0668} = 13.977$ .

**Exercice 3.** La probabilité pour que la durée de vie d'un composant électronique dépasse 10 000 heures est de 80% et l'on admet que les pannes des différents composants sont des événements indépendants.

1. Avec 3 composants, on réalise un premier montage "série". Il suffit que l'un des composants tombe en panne pour que le système ne fonctionne plus. Quelle est la probabilité pour que celui-ci fonctionne au moins 10 000 heures ?
2. Avec 3 composants, on réalise un deuxième montage, qui est "parallèle". Dans ce cas pour que le système ne fonctionne pas, il faut que *tous* les 3 composants tombent en panne.
  - (a) Quelle est la probabilité pour que le système parallèle fonctionne au moins 10 000 heures ?
  - (b) Sachant que le système parallèle, qui a été sous tension pendant 10 000 heures, est en état de fonctionnement, quelle est la probabilité pour trouver au moins un composant défectueux ?

1. En désignant par  $X_1, X_2$  et  $X_3$  les durées respectives des 3 composants, la probabilité de fonctionnement du système pendant au moins 10 000 heures, dans un montage "série, vaut :

$$Pr(X_1 \geq 10000, X_2 \geq 10000, X_3 \geq 10000) = 0.8^3 = 0.512.$$

2. Dans le cas d'un montage "parallèle" :

(a) La probabilité de fonctionnement pendant au moins 10 000 heures vaut :

$$Pr(\text{au moins une des v.a } X_1, X_2, X_3 \geq 10000) = 1 - 0.2^3 = 0.992.$$

(b) En vertu du théorème de Bayes, la probabilité recherchée est ratio entre la probabilité d'une ou de deux défaillances dans l'intervalle de fonctionnement de durée de 10 000 h et celle d'au moins une pendant le même intervalle. D'où :

$$\begin{aligned} Pr(\text{au moins un composant défectueux} \mid \text{le système fonctionne}) &= \frac{3 \times 0.8^2 \times 0.2 + 3 \times 0.8 \times 0.2^2}{0.8^2 + 3 \times 0.8^2 \times 0.2 + 3 \times 0.8 \times 0.2^2} \\ &= 0.4786. \end{aligned}$$

**Exercice 4.** Soit la fonction  $f_\theta(x)$  donnée par :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

où  $\theta$  est un paramètre réel de valeur strictement supérieure à 1.

1. Montrer que  $f_\theta$  est une densité de probabilité. Soit  $X$  une v.a. de densité  $f_\theta$ .
2. Trouver un estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$  pour le paramètre  $\theta$ , où  $x_1, \dots, x_n$  est un échantillon de la v.a.  $X$ .
3. Trouver l'espérance de la v.a.  $X$ .

**Solution**

1. On remarque d'abord que  $\theta > 1$  implique la convergence de l'intégrale  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\theta+1}}$ . Nous avons alors :

$$\int_1^\infty f_\theta(x) dx = \int_1^\infty \frac{\theta}{x^{\theta+1}} dx = \left[ -x^{-\theta} \right]_1^\infty = 1.$$

2. On a la fonction de vraisemblance :

$$L_n = \theta^n \times (x_1 \dots x_n)^{-(\theta+1)} \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x_1) \dots \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x_n)$$

Afin de maximiser cette fonction, nous maximisons son logarithme  $\ln(L_n) = n \ln \theta - (\theta + 1) \ln(x_1 \dots x_n)$ , pour  $x_1, \dots, x_n \geq 1$ . Par la méthode bien connue de dérivation, on trouve l'estimateur qui maximise la vraisemblance :

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}.$$

3. Pour l'espérance de  $X$ , nous avons :

$$\mathbb{E}X = \int_1^\infty \frac{\theta x}{x^{\theta+1}} dx = \int_1^\infty \frac{\theta}{x^\theta} dx$$

Cette intégrale converge, puisque  $\theta > 1$ . Nous aurons donc :

$$\mathbb{E}X = \left[ \frac{\theta x^{-\theta+1}}{-\theta+1} \right]_1^\infty = \frac{\theta}{\theta-1}.$$