



DISVE
Pôle Scolarité

Année universitaire 2010 - 2011
Session 1 d'automne



Parcours/Etape: CSB3 UE: INF 162
Epreuve: Probabilités pour l'informatique
Date: 3 janvier 2011 Heure: 8h30 Durée:
1h30
Documents non autorisés
Epreuve de M. Melançon

Examen blanc – Epreuve préparatoire

Exercice 1. “Vrai ou faux / Choix multiples” : une bonne réponse vaut 1 point, une mauvaise réponse vaut -1 point

Note : les réponses données ici sont justifiées – aucune justification n’était cependant demandée.

- Supposons que la fonction (python) `entierAlea(1, n)` génère aléatoirement un entier dans $\{1, \dots, N\}$. Par conséquent, l’instruction `k * entierAlea(1, N)` génère aléatoirement (uniformément) un entier dans $\{1, \dots, k \cdot N\}$.
 - Vrai
 - Faux

Faux. La fonction `k * entierAlea(1, N)` retourne nécessairement un multiple de k .
- La variance d’une variable de Bernoulli de paramètre p est $p(1 - p)$.
 - Vrai

Faux

Vrai. L'espérance d'une variable de Bernouilli X est $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$. La variance est $\mathbb{V}(x) = (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p = p(1 - p)(p + (1 - p)) = p(1 - p)$.

3. On considère un jeu de dés qui consiste à avoir un total maximal en lançant deux dés. On est autorisé à lancer le second dé une deuxième fois si le premier donne un entier pair. Les variables X_1 et X_2 donnent les valeurs des dés au premier et au second lancer respectivement.

- X_2 est dépendante de X_1 , mais X_1 ne dépend pas de X_2
 X_1 et X_2 sont indépendantes
 Aucune de ces réponses

La relation de dépendance est symétrique (de manière générale). En effet, soient deux variables aléatoires Y , Z et supposons que Y ne dépende pas de Z , c'est-à-dire $P(Y|Z) = P(Y)$. Il s'en suit que $P(Y \cap Z) = P(Y)P(Z)$ et par conséquent, $P(Z|Y) = P(Y \cap Z)/P(Y) = P(Z)$, c'est-à-dire que Z ne dépend pas de Y .

Les deux variables décrites ici sont évidemment dépendantes. Pour faire parler l'intuition : si on vous donne la valeur de la variable X_2 , les probabilités d'observer X_1 ne varie pas de manière uniforme ... Plus formellement ...

On peut voir le jeu de la manière suivante : on lance le premier dé, puis on lance le second dé deux fois en notant bien les valeurs obtenues (dans l'ordre). On est autorisé à prendre la valeur maximale du second dé seulement lorsque le premier dé est pair. L'espace considéré est donc formé des triplets $(i, j, k) \in \{1, \dots, 6\}^3$. La valeur de la variable X_1 est le premier élément du triplet. La valeur de la seconde variable X_2 est calculé selon la valeur du premier entier du triplet, $X_2(i, j, k) = j$ si i est impair et $X_2(i, j, k) = \max\{j, k\}$ si i est pair. Il est utile d'énumérer les triplets selon les valeurs respectives des variables X_1 et X_2 . On voit que la probabilité d'avoir $X_1 = i$ et $X_2 = j$ avec i impair est $1/6^2$ puisque cela suit de tout triplet i, j, k avec k quelconque. La probabilité d'avoir $X_1 = i$ et $X_2 = j$ avec i pair est $P(X_1 = i \cap X_2 = j) = \frac{(2j-1)}{6^3}$ puisque cela suit des triplets (i, r, k) avec $j = \max\{r, k\}$ (il faut avoir soit $r = j$, soit $k = j$ et l'autre composante doit être inférieure ou égale à j).

On a $P(X_1 = i) = 1/6$ pour tout i . On peut calculer $P(X_2 = j)$:

$$\begin{aligned}
P(X_2 = j) &= P(X_2 = j|X_1 = 1)P(X_1 = 1) + \cdots + P(X_2 = j|X_2 = 6)P(X_1 = 6) \\
&= \frac{1}{6}(P(X_2 = j|X_1 = 1) + \cdots + P(X_2 = j|X_2 = 6)) \\
&= \frac{1}{6}(1/6 + (2j - 1)/6^2 + 1/6 + (2j - 1)/6^2 + 1/6 + (2j - 1)/6^2) \\
&= \frac{15 + 6j}{6^3}
\end{aligned}$$

On trouve $P(X_2 = j|X_1 = i) = 1/6$ lorsque i est impair, et $P(X_2 = j|X_1 = i) = \frac{(2j-1)}{6^2}$ lorsque i est pair. Par ailleurs, on calcule, pour i pair :

$$P(X_1 = i|X_2 = j) = \frac{P(X_1 = i \cap X_2 = j)}{P(X_2 = j)} = \frac{\frac{(2j-1)}{6^3}}{\frac{15+6j}{6^3}} = \frac{2j - 1}{15 + 6j}$$

Pour i impair, on trouve :

$$P(X_1 = i|X_2 = j) = \frac{P(X_1 = i \cap X_2 = j)}{P(X_2 = j)} = \frac{\frac{1}{6^2}}{\frac{15+6j}{6^3}} = \frac{6}{15 + 6j}$$

Ainsi, on n'a pas $P(X_1 = i|X_2 = j) = P(X_1 = i) = 1/6$ et qui montre bien que X_1 n'est pas indépendante de X_2 .

On dispose de deux dés à six faces numérotées de 1 à 6, l'un bleu, l'autre rouge. Les faces du dé bleu sont équiprobables. La face i du dé rouge a une probabilité d'apparition q_i proportionnelle à i . On lance les deux dés, on note X la face supérieure du dé rouge, et Y la face supérieure du dé bleu ; $Z = \max(X, Y)$ désigne la valeur maximale des deux faces.

4. On a $q_2 = 1/7$

Vrai

Faux

Faux. On doit avoir $q_1 + \cdots + q_6 = 1$ avec $q_i = i \cdot p$ pour une probabilité p à trouver. On a donc $p = 1/(1 + 2 + \cdots + 6) = 1/21$. Par conséquent, $q_i = i/21$.

5. On a $P(Z = 2) = 5/126$

Vrai

Faux

Vrai. On a $Z = 2$ exactement lorsque soit $X = 1$ et $Y = 2$, soit $X = 2$ et $Y = 2$, soit $X = 2$ et $Y = 1$. Ces cas sont exclusifs, on a donc $P(Z = 2) = 1/6 \cdot (2q_2 + q_1) = 5/126$.

Exercice 2. On met au point une heuristique (un algorithme) qui détecte si une page web écrite en anglais est rédigée par un *natif* (quelqu'un dont l'anglais est la langue maternelle). On évalue à 55% le pourcentage de pages sur le web qui sont écrites en anglais par des natifs. L'heuristique réussit à détecter correctement que la page est écrite par un natif dans 95% des cas lorsque la page est effectivement écrite par un natif. Elle affirme cependant incorrectement que la page est écrite par un natif alors que ce n'est pas le cas avec probabilité 1%.

Quelle est la probabilité qu'une page soit écrite par un natif lorsque l'heuristique l'affirme ?

Désignons par A l'évènement "la page web est effectivement rédigée par un *natif*", et par H l'évènement "l'heuristique indique que la page web est rédigée par un *natif*". Les hypothèses nous donnent $P(A) = 0.55$, $P(H|A) = 0.95$ et $P(H|A^c) = 0.01$. On en tire $P(A^c) = 0.45$. On cherche $P(A|H)$. On utilise la formule de Bayes pour trouver

$$P(A|H) = \frac{P(H|A)P(A)}{P(H|A)P(A) + P(H|A^c)P(A^c)} = \frac{0.95 \times 0.55}{0.95 \times 0.55 + 0.01 \times 0.45}$$

Exercice 3. Au casino, un croupier choisit deux nombres $m, n \in [0, N]$, avec $m < n$ disons, qu'ils ne vous dévoilent pas. Il écrit ces deux nombres sur des bouts de papier qu'il place secrètement sous deux chapeaux. Il vous demande ensuite de choisir l'un des chapeaux et vous dévoile le nombre qui y était caché. Vous devez ensuite parier en répondant à la question : le nombre resté sous l'autre chapeau est-il plus grand que celui que l'on vient de vous dévoiler ?

A priori, à choisir sans stratégie particulière mais seulement "au hasard" (en jouant à pile ou face, par exemple), vous n'avez qu'une chance sur deux de gagner. Vous mettez au point une stratégie pour maximiser vos gains : vous choisissez un nombre Z dans $[0, N]$ au hasard et selon une distribution de probabilité quelconque. Si Z est strictement plus grand que

le nombre dévoilé, vous pariez que le nombre resté secret est plus grand que celui qui a été dévoilé. Montrez que votre stratégie est plus avantageuse.

Notons X le nombre qui vous a été dévoilé. Il s'agit de calculer la probabilité $P(X = m, Z > m) + P(X = n, Z < n)$ (ce sont les deux cas gagnants). Le croupier choisit l'un des deux chapeaux de manière équiprobable et les variables X et Z sont indépendantes, par conséquent :

$$\begin{aligned} & P(X = m, Z > m) + P(X = n, Z < n) \\ = & P(X = m)P(Z > m) + P(X = n)P(Z \leq n) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^N P(Z = k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n P(Z = k) \\ = & 1/2 + \sum_{k=m+1}^n P(Z = k) = 1/2 + P(m+1 \leq Z \leq n) \geq 1/2 \end{aligned}$$