



ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007/2008  
1ÈRE SESSION D'AUTOMNE



**Parcours :** MISMI  
**Code UE :** MSI 102  
**Épreuve :** Informatique  
**Date :** Jeudi 3 janvier 2008  
**Heure :**  
**Durée :** 1h30  
**Documents :** Photocopies du cours et notes manuscrites autorisées  
**Épreuve de :** C. Blanc, C. Pannier, G. Mélançon, M. Zeitoun

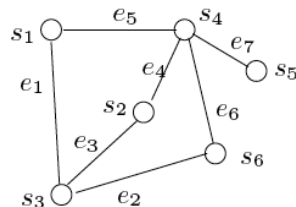
Indiquez votre numéro d'anonymat : No :

Rappels : un graphe est *simple* s'il n'a ni boucle ni arête multiple (il y a une arête au maximum entre deux sommets). Il est *complet* s'il est simple et si tout sommet est relié par une arête à chacun des autres sommets. Un *cycle* est une chaîne dont le premier sommet et le dernier sommet sont les mêmes.

**Exercice 1** Répondre par Vrai ou Faux en cochant la case correspondante (attention! les réponses incorrectes seront comptées négativement) :

V | F

- |  Dans un graphe Eulérien, toutes les chaînes Eulériennes ont la même longueur.
- |  Si un graphe est dessiné de sorte que deux arêtes au moins se coupent, alors il n'est pas planaire.
- |  Si un graphe de  $n$  sommets n'a ni boucle, ni arête multiple, alors les degrés de ses sommets sont compris entre 0 et  $n - 1$ .
- |  Dans le graphe ci-dessous,  $s_1, e_1, s_3, e_3, s_2, e_4, s_4, e_7, s_5$  est une chaîne simple entre  $s_1$  et  $s_5$ .



- |  Si on ajoute une arête à un graphe Eulérien, il reste Eulérien.
- |  Si on ajoute une arête à un graphe connexe, il reste connexe.
- |  Si on ne peut pas colorier un graphe avec moins de 7 couleurs, alors il n'est pas planaire.
- |  Si un graphe n'a que des sommets pairs et n'est pas Eulérien, alors il n'est pas connexe.
- |  Si un graphe est 2-coloriable, alors il n'a pas de cycle.
- |  Si un graphe admet un cycle Eulérien, alors toutes les chaînes Eulériennes sont des cycles.
- |  Si un graphe a  $n$  sommets et au moins  $n^2$  arêtes, alors il est connexe.
- |  Si un graphe simple a  $n$  sommets et au moins  $n(n - 1)/2$  arêtes, alors il est connexe.
- |  Tout graphe simple avec  $n$  sommets et  $n(n - 1)/2$  arêtes est un graphe complet.
- |  Tout graphe simple avec  $n$  sommets a au plus  $n(n - 1)/2$  arêtes.
- |  Il existe un graphe simple, sans cycle, avec 4 sommets et 4 arêtes.

16.  |  Pour tout graphe connexe, il existe un cycle passant par tous les sommets et au moins une fois par chaque arête.
17.  |  Tout graphe dont tous les cycles simples sont de longueur 3 est 3-coloriable.

**Exercice 2** 1. Expliquer pourquoi dans un graphe Eulérien toutes les chaînes Eulériennes ont la même longueur.

2. On considère  $K_7$ , le graphe complet à 7 sommets. On rappelle que *complet* signifie que chaque sommet est relié à chaque autre sommet par exactement une arête. Quel est le degré de chaque sommet ? Justifier que  $K_7$  est Eulérien.
3. Quelle est la longueur commune de tous les cycles Eulériens ?

**Exercice 3** Une compétition réunit des sportifs. Chacun d'eux participe à plusieurs épreuves. Chaque épreuve est organisée une fois, pour tous les sportifs qui y participent. Il y a trois catégories de sportifs :

- ceux qui participent aux épreuves de natation (N), marathon (M), et course cycliste (C) ;
- ceux qui participent aux épreuves de natation (N), hauteur (H), et longueur (L) ;
- ceux qui participent aux épreuves de course cycliste (C) et longueur (L).

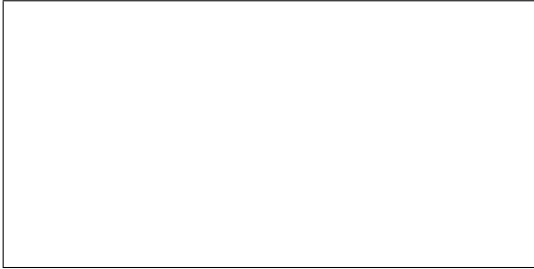
Le temps nécessaire pour chaque épreuve est 4h. On veut minimiser la durée totale de la compétition.

1. Représenter par un graphe les épreuves qu'on ne pourra pas faire en parallèle.
2. Exprimer le problème initial en terme de coloration de ce graphe. À quoi correspond le nombre minimal de créneaux de 4h nécessaires ?
3. Calculer ce nombre et donner une organisation optimale de la compétition.
4. Que deviennent les résultats des questions 1, 2 et 3 si un quatrième groupe de sportifs s'inscrit aux épreuves de course cycliste (C) et hauteur (H) ?

**Exercice 4** 1. Écrire une fonction `une_couleur(G, c)` qui renvoie `True` si tous les sommets du graphe `G` ont la couleur `c`, et `False` sinon.



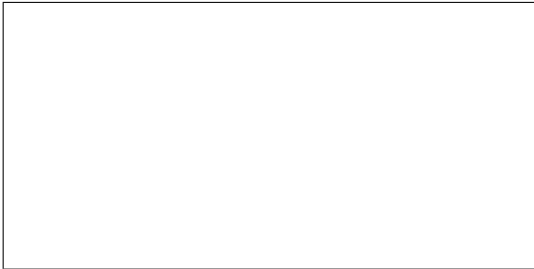
2. On suppose que les sommets des graphes manipulés sont coloriés soit en blanc ("white"), soit en rouge ("red"), soit en bleu ("blue") soit en vert ("green"). En utilisant la fonction `une_couleur`, écrire une fonction `monochrome(G)` qui teste si tous les sommets de  $G$  sont de la même couleur.



3. Évaluer, dans le cas le pire, le nombre de fois qu'on utilise la fonction `couleur()` en fonction du nombre  $n$  de sommets de  $G$ .



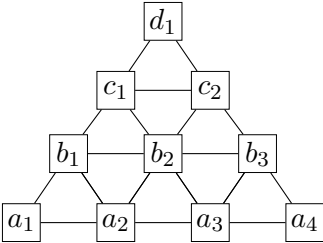
4. Écrire une fonction `monochrome_bis(G)` qui n'appelle la fonction `couleur()` que  $n$  fois.



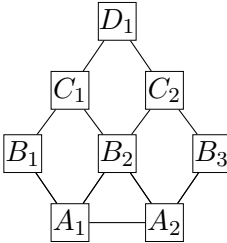
**Exercice 5** 1. Le graphe  $G_1$  ci-dessous est-il 2-coloriable ? Si oui, le colorier avec une 2-coloration. Sinon, justifier.

2. Le graphe  $G_1$  est-il Eulérien ? Si oui, donner une chaîne Eulérienne. Sinon, justifier.

3. Mêmes questions que 1 et 2 pour le graphe  $G_2$  ci-dessous.



Graphe  $G_1$



Graphe  $G_2$

**Exercice 6**

1. Faire tourner la fonction ci-contre pour  $n = 5$ , et donner sa valeur retour.

$n$	$i$
2	
3	
4	
5	

Valeur retour :

```
def mystere(n):  
    for i in range(2,n):  
        if n%i == 0:  
            return True  
    return False
```

2. Que retourne cette fonction en général ?

3. Faire tourner la fonction ci-contre pour  $n = 5$ , et donner sa valeur retour.

$n$	$i$
2	
3	
4	
5	

Valeur retour :

```
def mystere_bis(n):  
    for i in range(2,n):  
        if n%i == 0:  
            return True  
        else:  
            return False
```

4. Que retourne cette fonction en général ?