Initiation à l'informatique - 1er semestre
TD 3

Exercice 3.1 *Modélisation*
On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients **non gradués**, l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres, et une bassine vide de contenance au plus 6 litres. Comment doit-on procéder pour obtenir 4 litres de liquide dans la bassine ?
Facultatif : Comment peut-on prélever 4 litres, si l'on n'a que les deux récipients **non gradués** ?

Exercice 3.2 *Définition du type abstrait*
L'objectif de cet exercice est de déterminer les différentes fonctions dont on a besoin pour manipuler le **type abstrait** graphe **centré-sommets**. Pour cela nous allons utiliser le graphe tram (figure 4) qui modélise le réseau du tramway de Bordeaux. Quelles sont les primitives nécessaires pour :
- Connaître le nombre de stations du réseau ?
- Connaître depuis une station donnée le nombre de directions que l'on peut prendre ?
- Savoir si une station est voisine d'une autre station ?

Citez quelques opérations qui d'aprés vous peuvent être intéressantes dans le type abstrait graphe **centré sommets**. Expliquez pourquoi.

Exercice 3.3 *Utilisation du type abstrait*

1. Comment interpréter la boucle suivante dans le graphe tgv (figure 1) ?

```
for i in range(NB_NODES(G)):
    s = NODE(G, i)
```

2. Pour un sommet `s` quelconque du graph tgv, comment interpréter la boucle ci-dessous ?

```
for i in range(NB_DARTS(s)):
    e = EDGE(s, i)
    t = FOLLOW_EDGE(s,e)
```

3. Faire "tourner" 'algorithme suivant sur le graphe tgv en donnant les valeurs successives des variables `s`, `a` et `b`. Quel est le résultat obtenu ?

```
def mystere(G):
   nb_sommets = NB_NODES(G)
   a = 0.0
   for i in range (nb_sommets):
       s = NODE(G, i)
       b = NB_DARTS(s)
       a = a + b
   return a / nb_sommets
```

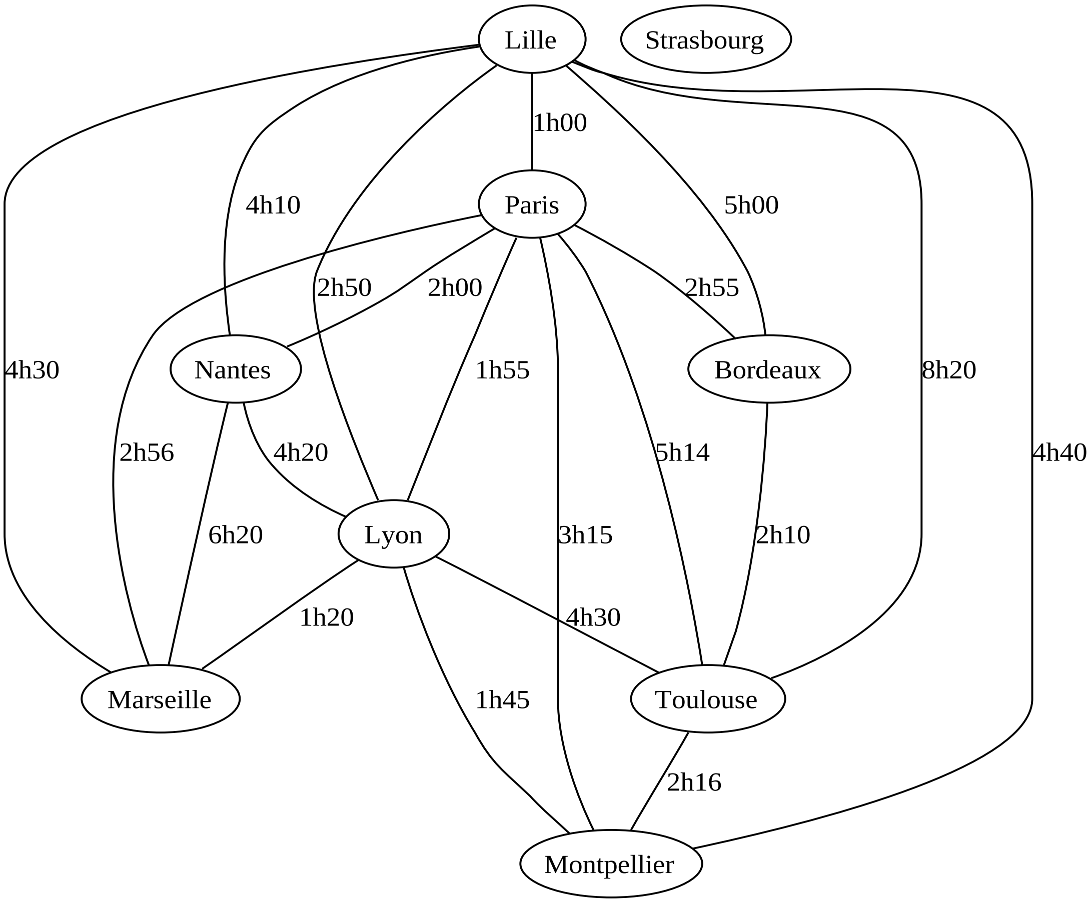

FIG. 1 – Graphe du tgv.

Que fait cet algorithme dans le cas général ? Quelle est sa complexité ?

Exercice 3.4 *coloration de graphes*
On imagine un algorithme pour colorier les sommets d'un graphe non orienté. Initialement, un seul sommet est rouge et les autres sont blancs. A la fin de l'algorithme, chaque sommet sera soit rouge, soit vert. Voici l'algorithme :

```
tant qu'il existe un sommet blanc S avec un voisin rouge ou vert :
   si S a un voisin vert
   alors colorier S en rouge
   sinon colorier S en vert
```

1. Marquer le résultat de l'algorithme sur les graphes $g1$ et $g2$ (figure 2 et 3) où S_0 est le sommet rouge.
2. On cherche à colorier un graphe sans que deux sommets adjacents aient la même couleur. Deux couleurs suffisent-elles pour colorier un graphe à trois sommets ? Trois couleurs suffisent-elles pour colorier un graphe à quatre sommets ?

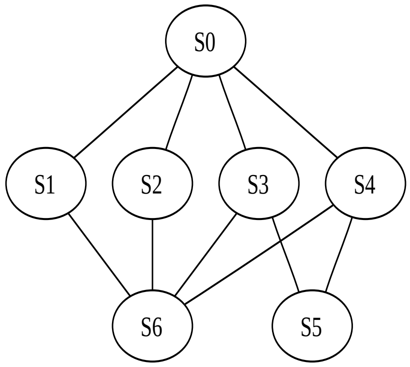

FIG. 2 – Graphe $g1$.

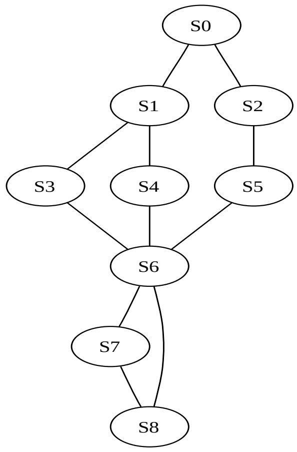

FIG. 3 – Graphe $g2$.

Exercice 3.5 *modélisation et coloration de graphes*
Sept élèves, désignés par A,B,C,D,E,F et G se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise qui a rencontré qui (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement).

élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

1. Modélisez à l'aide d'un graphe la relation "a rencontré".
2. De combien de places assises doit disposer la bibliothèque pour que chacun ait pu travailler correctement au cours de cette journée ?

Exercice 3.6 *Notion de degré*

1. Essayez de construire un graphe simple (sans boucles et sans arêtes multiples) non orienté, ayant quatre sommets, et tel que tous les sommets ont des degrés distincts. Qu'en déduisez-vous ?
2. Soit G un graphe simple ayant n sommets ($n \geq 2$), tel que tous les sommets soient de degrés distincts. Pourquoi un sommet d'un tel graphe ne peut-il être de degré $\geq n$? En déduire les degrés respectifs des n sommets de G. Pourquoi est-il impossible que G possède simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n - 1$?
3. Montrez que dans un groupe n de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.

Exercice 3.7 *Exercice Complémentaire : Jeu de Fan Tan*
Deux joueurs disposent de 2 ou plusieurs tas d'allumettes. A tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas (selon la règle choisie). Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.
Modéliser ce jeu à l'aide d'un graphe dans le cas où l'on dispose au départ de deux tas contenant chacun trois allumettes, et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois.
Que doit jouer le premier joueur pour gagner la partie à coup sûr ?

Exercice 3.8 *Exercice Complémentaire*

1. Un *graphe cubique* est un graphe dont tous les sommets sont de degré 3. Dessiner des graphe cubiques qui ont respectivement 4, 5, 6, 7 sommets. En déduite le nombre d'arêtes d'un graphe cubique.
2. Un *graphe k-régulier* est un graphe où chaque sommet est de degré k. Quel est le nombre d'arêtes d'un graphe k-régulier ?
3. Ecrivez un algorithme qui détermine si un graphe est k-régulier. Quelle est sa complexité ?

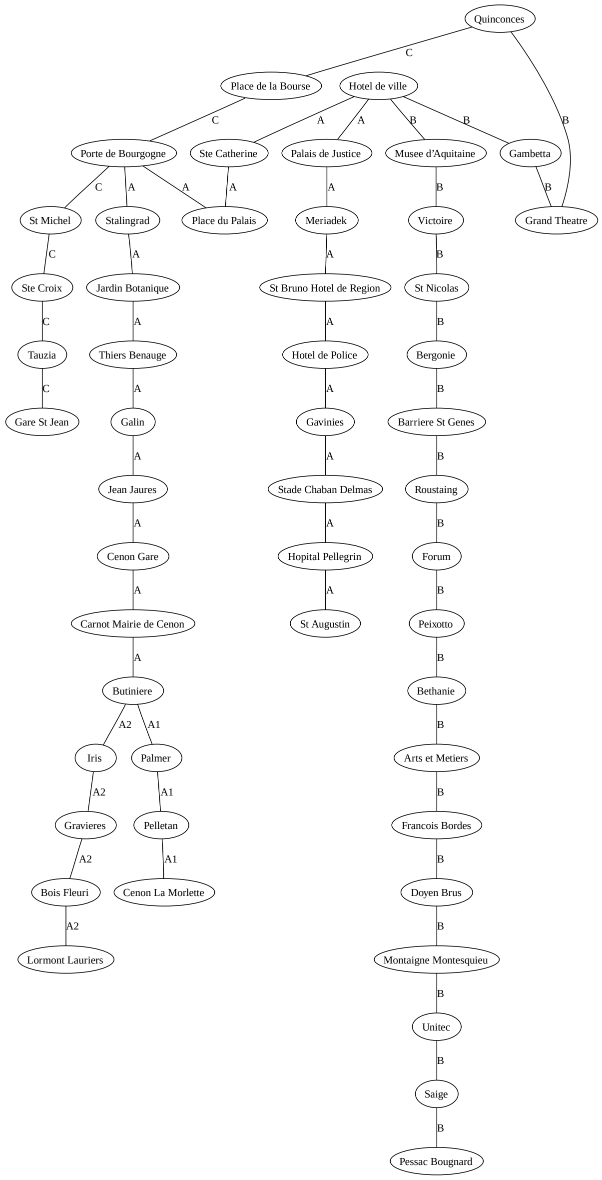

FIG. 4 – Graphe du tram.