

Chapitre 14. Arbres (hors-programme)

Théorème 14.0 *Un graphe connexe avec n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.*

Exercice 14.0.1 Peut-on en déduire les propositions suivantes ?

1. Si un graphe de n sommets a au moins n arêtes, alors il n'est pas connexe.
2. Si un graphe de n sommets a au moins n arêtes, alors il est connexe.
3. Si un graphe de n sommets a $n - 2$ arêtes, alors il n'est pas connexe.

Définitions

Un graphe connexe avec n sommets et $n - 1$ arêtes est appelé un **arbre**; un sommet de degré 1 dans un arbre est appelé une **feuille**.

Exercice 14.0.2

1. Dessiner tous les arbres avec 1, 2, 3 ou 4 sommets.
2. Montrer qu'un arbre de plus d'un sommet possède au moins une feuille (et même deux).
3. Montrer qu'un arbre privé d'une feuille (et de l'arête issue de cette feuille) reste un arbre.
4. Dessiner tous les arbres avec 5 sommets.
5. Dessiner tous les arbres avec 6 sommets (il y en a six).

Exercice 14.0.3 On se propose de montrer le théorème 14.0 par induction sur le nombre de sommets.

1. Vérifier que le théorème est vrai pour tout graphe à un sommet — *trop cool*.
2. Induction : partant d'un graphe à $n + 1$ sommets, on construit un ou plusieurs graphes à moins de n sommets pour appliquer l'hypothèse d'induction. On propose deux méthodes :
 - a) 1^{ère} méthode : supprimer un sommet et toutes les arêtes qui lui sont incidentes. Dans ce cas, le graphe obtenu n'est plus nécessairement connexe. Donner un exemple où cela se produit. Appliquer l'hypothèse d'induction sur chacune des composantes connexes du graphe obtenu pour conclure¹.
 - b) 2^{ème} méthode : utiliser la contraction d'une arête. Vérifier que le graphe obtenu reste connexe, et calculer son nombre de sommets et son nombre d'arêtes pour conclure.

Exercice 14.0.4 1. Soit G un graphe connexe possédant un cycle élémentaire de longueur non nulle Γ : montrer que la suppression de n'importe quelle arête de Γ laisse le graphe connexe.

1. On pourra s'appuyer sans le démontrer sur le fait suivant : si le graphe obtenu possède k composantes connexes alors le nombre d'arêtes incidentes au sommet supprimé est supérieur à k .

2. En déduire qu'un arbre ne possède pas de cycle de longueur non nulle.
3. En déduire que pour tous sommets s et t d'un arbre il existe une seule chaîne *élémentaire* qui relie s et t .

Note : chacune des deux dernières propriétés caractérise en fait les arbres parmi les graphes connexes, et sert souvent de définition pour la notion d'arbre.