

Recherche Opérationnelle - Cours 7

Olivier Baudon

Université de Bordeaux

19 octobre 2021

Sommet-connectivité

La sommet-connectivité (ou plus simplement la connectivité) d'un graphe G non orienté est le nombre minimum de sommets qu'il faut supprimer pour que le graphe ne soit plus connexe.

Par convention, la connectivité du graphe complet à n sommets K_n est égale à $n - 1$.

Théorème de Menger : G est k -connexe si et seulement si il existe entre toute paire de sommets u et v k chaînes reliant u et v sommet-disjointes à l'exception de leur extrémités.

Application de Ford et Fulkerson

Pour calculer la connectivité d'un graphe G non orienté, on va d'abord considérer un graphe G'_{ab} orienté permettant de savoir combien de sommets il est nécessaire de supprimer dans G pour éliminer toute chaîne reliant les sommets a et b . Cette valeur sera notée $p(a, b)$.

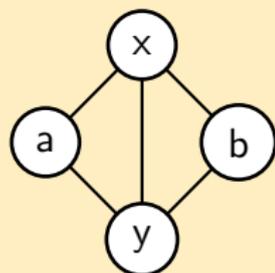
On pose $G = (V, E)$ et $G'_{ab} = (V', E')$.

- ▶ Pour tout sommet $v \in V$, ajouter à V' deux sommets v' et v'' reliés par un arc $e_v = v'v''$.
- ▶ Pour toute arête $e = uv \in E$, ajouter à E' deux arcs $e' = u''v'$ et $e'' = v''u'$.
- ▶ On considère le réseau (G', a'', b', c) avec comme capacités :
 - ▶ une capacité de 1 pour tout arc $e_v = v'v''$ associé à un sommet v de V .
 - ▶ une capacité ∞ pour tout arc $e' = u''v'$ ou $e'' = v''u'$ associés à l'arête $e = uv$ de E .

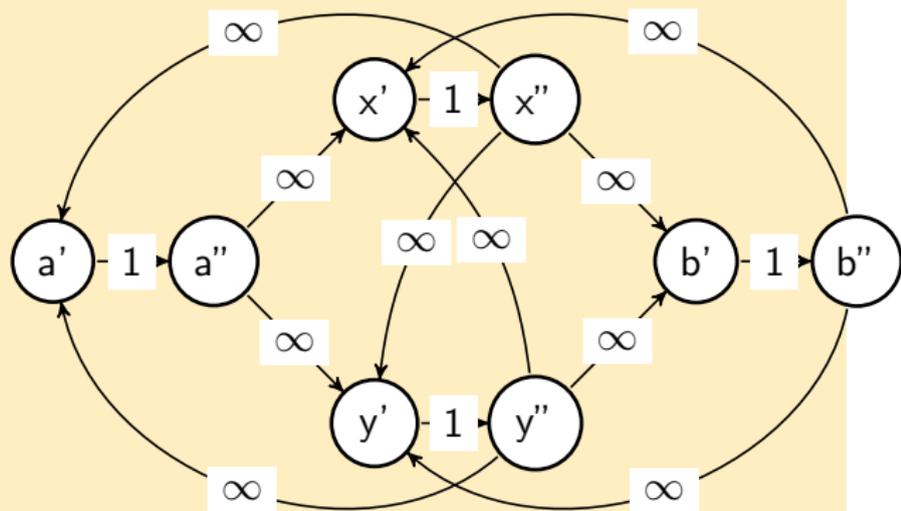
Sommet-connectivité

Exemple

Exemple de graphe G' lié au graphe G ci-dessous, pour calculer $p(a, b)$.



Graphe G



Graphe G'

Algorithme

Soit G un graphe simple à n sommets.

- 1: **si** $G = K_n$ **alors**
- 2: **retourner** $n - 1$
- 3: **fin si**
- 4: Soit v_1, v_2, \dots, v_n un ordre total sur les sommets de G tel que v_1 possède au moins un sommet v non voisin
- 5: $k(G) \leftarrow \infty$
- 6: $i \leftarrow 1$
- 7: **tant que** $i \leq k(G)$ **faire**
- 8: **pour tout** $v_j, j > i$ tel que v_i et v_j ne sont pas voisins **faire**
- 9: $k(G) \leftarrow \min(k(G), p(v_i, v_j))$
- 10: **fin pour**
- 11: $i \leftarrow i + 1$
- 12: **fin tant que**
- 13: **retourner** $k(G)$

Capacités bornées

On s'intéresse à des flots dont la valeur minimum sur chaque arc peut être strictement supérieure à 0.

Voir sujet : https://dept-info.labri.fr/~baudon/Master/R0_Miage/Cours/flots-canalises.pdf