

Recherche Opérationnelle - Cours 3

Olivier Baudon

Université de Bordeaux

19 septembre 2024

Objectifs

L'algorithme de Bellman-Ford, que nous appellerons simplement **Ford** (pour éviter les confusions), permet de calculer les plus courts chemins entre un sommet s et tous les autres, en particulier même si le graphe possède un ou des circuits et/ou des arcs de poids négatifs.

Si le graphe possède un circuit négatif, l'algorithme renverra Faux, sinon Vrai.

Principe

Le principe de l'algorithme est basé sur la constatation suivante : s'il existe un plus court chemin entre deux sommets u et v dans un graphe à n sommets, il existe un plus court chemin de longueur au plus $n - 1$.

On va donc calculer les plus courts chemins depuis un sommet s ayant successivement des longueurs (au moins de) 1 à $n - 1$. Puis on va calculer les plus courts chemins depuis un sommet s ayant une longueur (au moins) n . Si la longueur des plus courts chemins de longueur (au moins) n diminue par rapport à ceux de longueur (au moins) $n - 1$, alors on pourra en déduire que le graphe possède un circuit négatif.

Algorithme de Ford

Principe

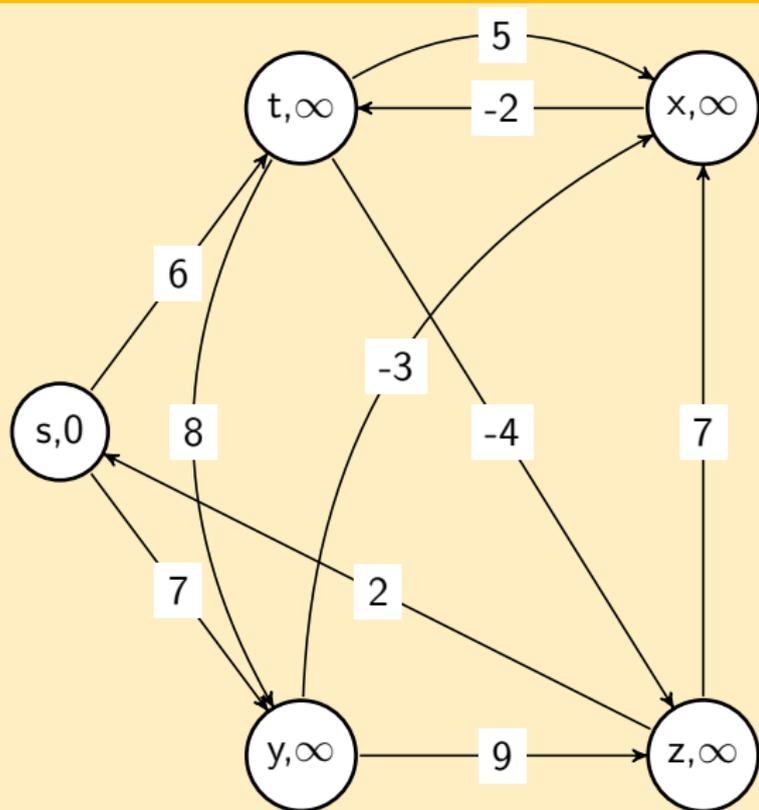
A chaque itération de 1 à n , on effectue un relâchement sur chaque arc uv pour voir si il est opportun d'utiliser cet arc pour avoir un plus court chemin entre s et v .

Énoncé

Voir document "Algorithmes des graphes" page 5.

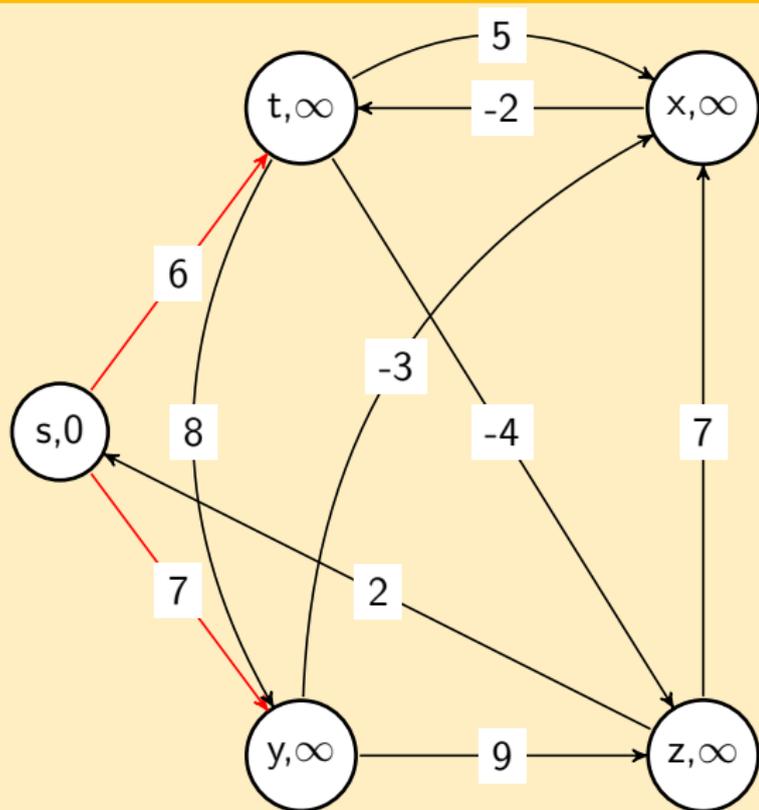
Algorithme de Ford

Exemple



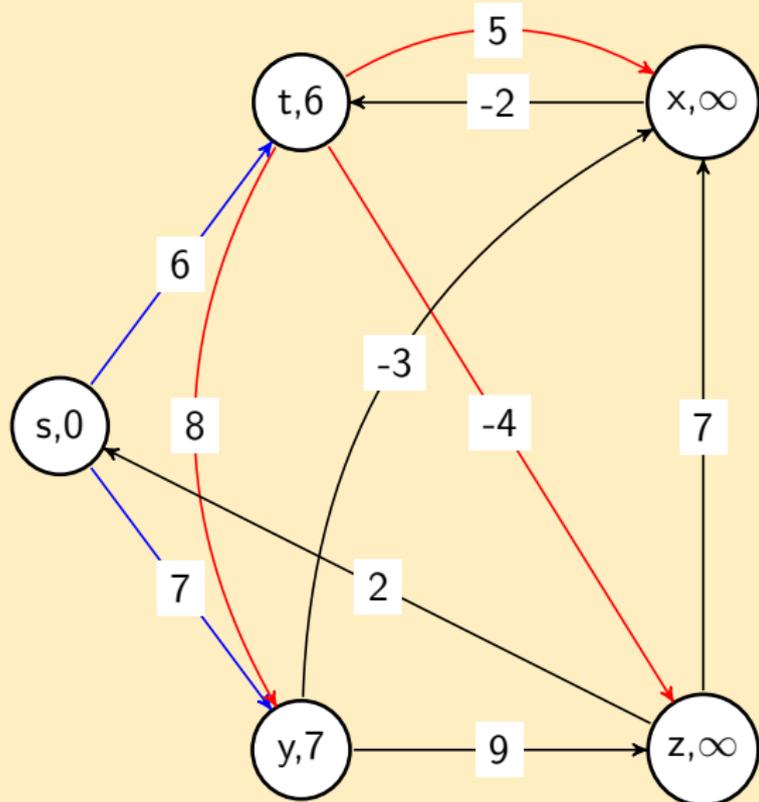
Algorithme de Ford

Exemple : $i = 1$, arcs sortants de s



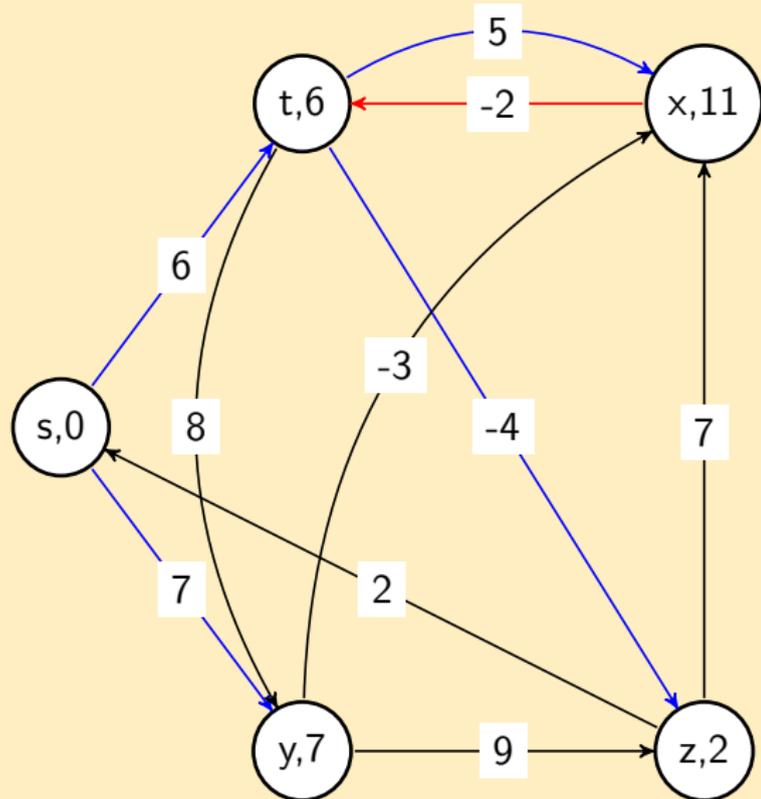
Algorithme de Ford

Exemple : $i = 1$, arcs sortants de t



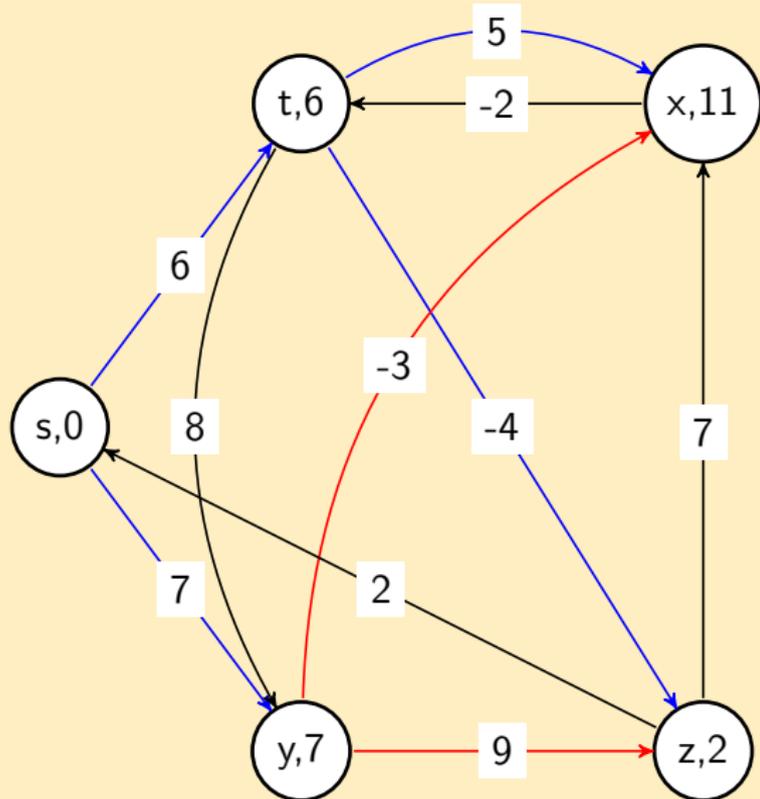
Algorithme de Ford

Exemple : $i = 1$, arcs sortants de x



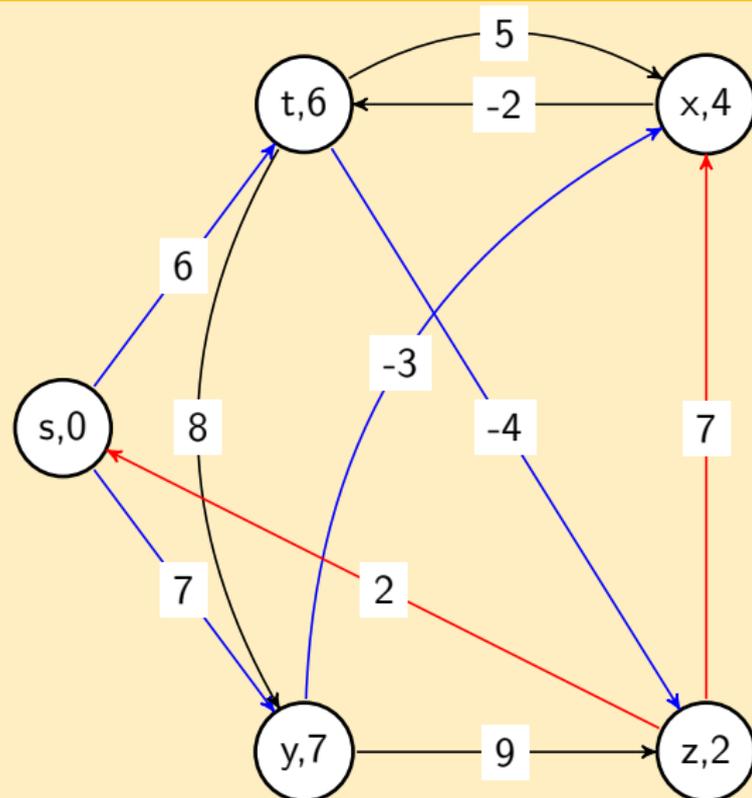
Algorithme de Ford

Exemple : $i = 1$, arcs sortants de y



Algorithme de Ford

Exemple : $i = 1$, arcs sortants de z

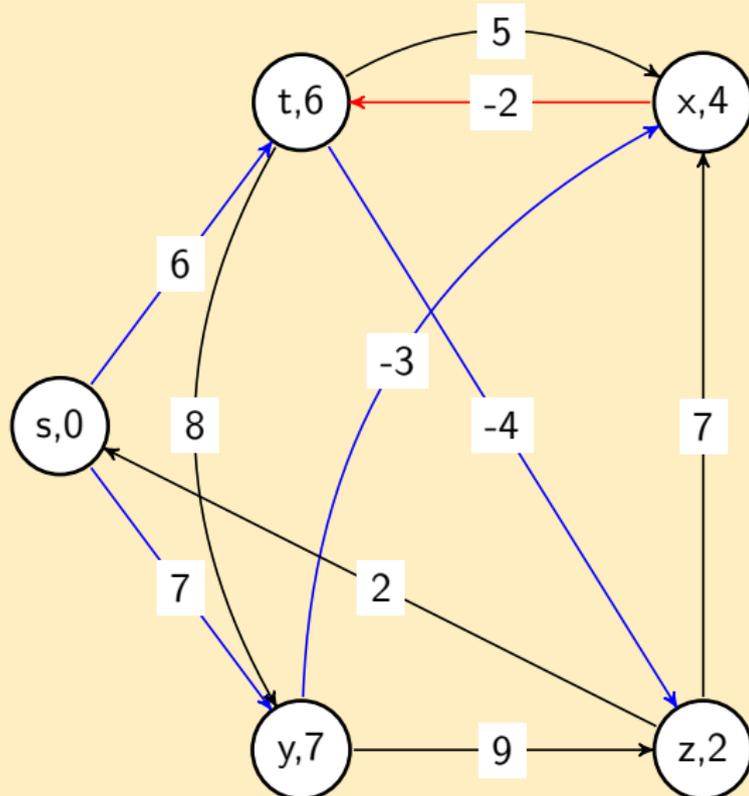


Exemple : $i = 2$

Remarque : pour s, t, y et z , leur distance à s n'a pas été modifiée après avoir traité leurs arcs sortants avec $i = 1$.

Algorithme de Ford

Exemple : $i = 2$, arcs sortants de x

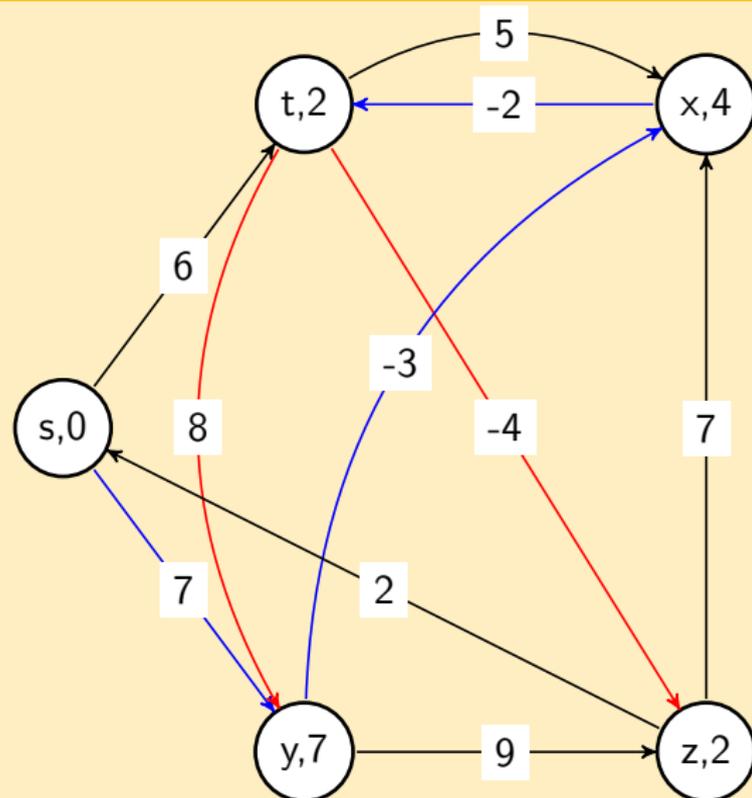


Exemple : $i = 3$

Remarque : pour s, x, y et z , leur distance à s n'a pas été modifiée après avoir traité leurs arcs sortants avec $i = 2$.

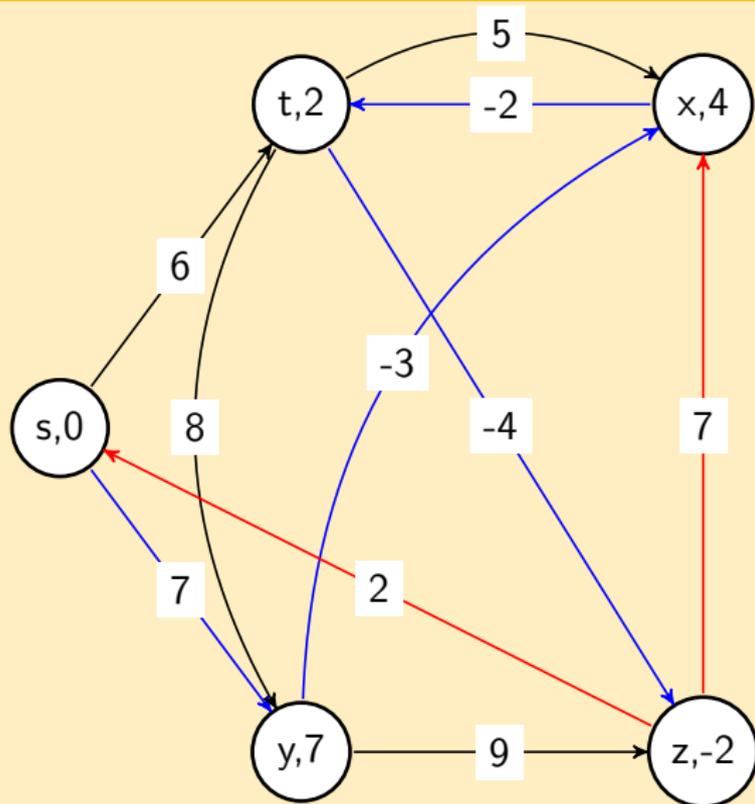
Algorithme de Ford

Exemple : $i = 3$, arcs sortants de t



Algorithme de Ford

Exemple : $i = 3$, arcs sortants de z

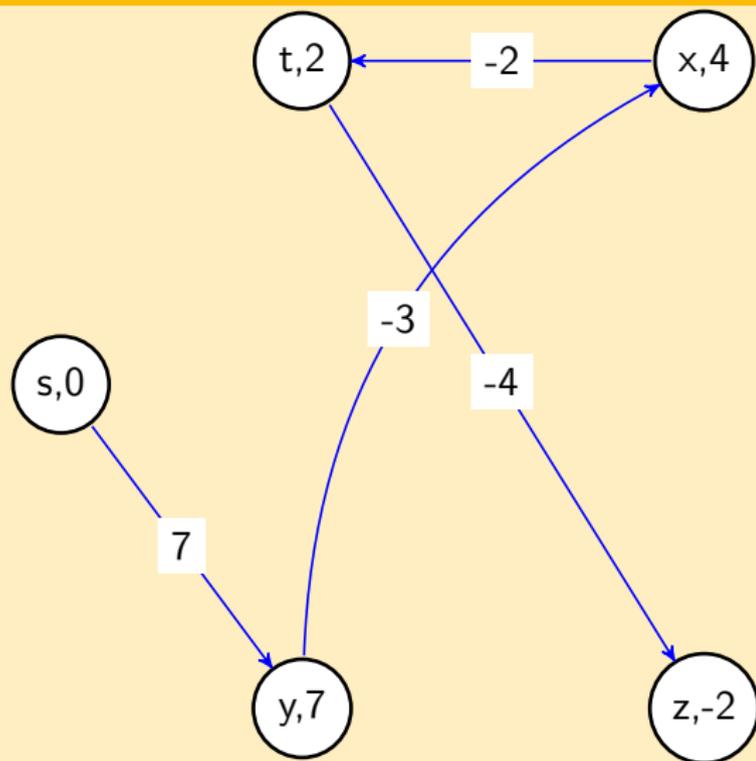


Exemple : $i = 4$

Remarque : Aucun sommet n'a eu sa distance à s modifiée après avoir traité ses arcs sortants avec $i = 3$. L'algorithme va donc terminer en renvoyant Vrai.

Algorithme de Ford

Arborescence



Complexité

L'algorithme de Ford est en $O(n \times m)$.

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Utilisation de Dijkstra

Si le graphe n'a que des poids positifs, on peut utiliser n fois Dijkstra (1 fois à partir de chaque sommet). On obtient ainsi un algorithme en $O(n^2 \times \log(n) + n \times m)$ en utilisant un tas de Fibonacci pour coder la file de priorité.

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Calcul matriciel

On considère une matrice W avec $W[i, j] =$

- ▶ 0 si $i = j$
- ▶ $\omega(i, j)$ si $ij \in E(G)$
- ▶ ∞ sinon.

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Calcul matriciel

On calcule ensuite une suite de matrices $D^{(1)} \dots D^{(n-1)}$. On pose $D^{(1)} = W$. La valeur $D_{ij}^{(k)}$ contiendra la longueur d'un plus court chemin de i à j de longueur au moins k . $D^{(k+1)}$ est calculée à partir de $D^{(k)}$ à l'aide de l'algorithme suivant :

- 1: **pour** i de 1 à n **faire**
- 2: **pour** j de 1 à n **faire**
- 3: $D_{ij}^{(k+1)} \leftarrow \infty$
- 4: **pour** a de 1 à n **faire**
- 5: $D_{ij}^{(k+1)} \leftarrow \min(D_{ij}^{(k+1)}, D_{ia}^{(k)} + W_{aj})$
- 6: **fin pour**
- 7: **fin pour**
- 8: **fin pour**
- 9: **retourner** $D^{(k+1)}$

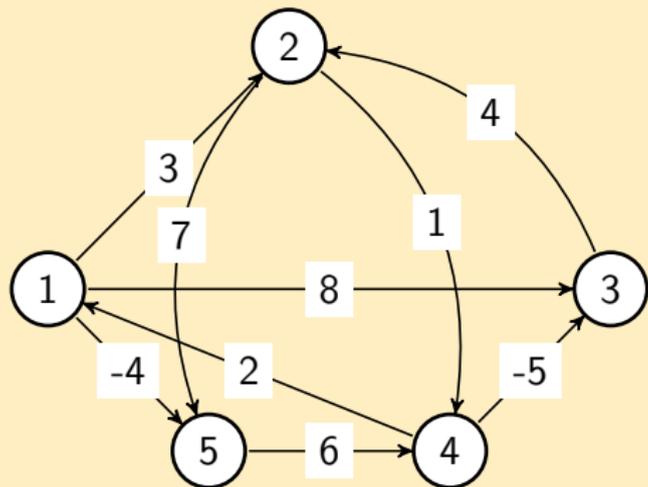
Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Calcul matriciel

Si $D^{(n-1)}$ contient dans sa diagonale une valeur négative, disons en $D_{ii}^{(n-1)}$, alors le graphe possède un circuit négatif passant par le sommet d'indice i .

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Calcul matriciel - Exemple



Graphe G

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice W

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Calcul matriciel - Exemple

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^{(1)}$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & \infty & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^{(2)}$

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Calcul matriciel - Exemple

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^{(3)}$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^{(4)}$

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Calcul matriciel - accélération

On peut diminuer le nombre de calculs en calculant directement, à partir de $D^{(k)}$ la matrice $D^{(2^k)}$ en remplaçant W par $D^{(k)}$. On ne calculera ainsi que les matrices D^{2^k} avec k puissance de 2, jusqu'à avoir $2^k \geq n - 1$.

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Algorithme de Floyd - Principe

L'algorithme de Floyd (souvent appelé Floyd-Warshall) s'appuie sur le fait que l'on ne va à chaque calcul de la nouvelle matrice considérer que les k premiers sommets comme sommets intermédiaires potentiels. Comme il y a n boucles, on aura bien à la fin considéré tous les sommets comme sommet intermédiaire potentiel.

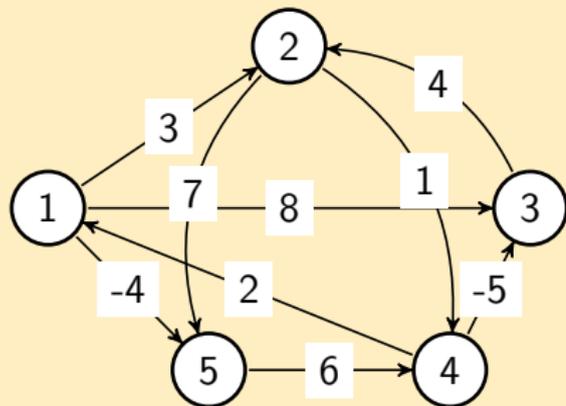
On calculera en parallèle une matrice *Pred* où $Pred_{ij}$ sera l'indice du sommet précédent j dans le plus court chemin de i à j .

Algorithme de Floyd - Énoncé

Voir document "Algorithmes des graphes" page 6.

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Algorithme de Floyd - Exemple



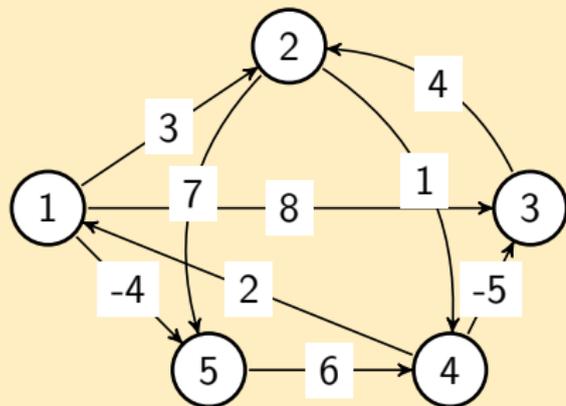
Graphe G

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice W

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Algorithme de Floyd - Exemple



Graphe G

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & NIL & NIL \\ 4 & NIL & 4 & NIL & NIL \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Matrice Pred

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Algorithme de Floyd - Exemple avec $k = 1$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice W

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & NIL & NIL \\ 4 & 1 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Matrice Pred

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Algorithme de Floyd - Exemple avec $k = 2$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice W

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & 2 & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Matrice Pred

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Algorithme de Floyd - Exemple avec $k = 3$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice W

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} NIL & 1 & 1 & 2 & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 2 & 2 \\ NIL & 3 & NIL & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Matrice Pred

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Algorithme de Floyd - Exemple avec $k = 4$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice W

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} NIL & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & NIL & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & NIL & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Matrice Pred

Plus court chemin entre toutes paires de sommets

Algorithme de Floyd - Exemple avec $k = 5$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice W

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} NIL & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & NIL & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & NIL & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & NIL & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & NIL \end{pmatrix}$$

Matrice Pred

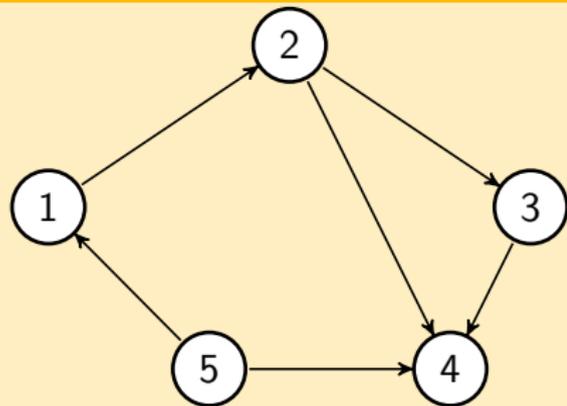
Algorithme de Warshall - Principe

L'algorithme de Floyd peut être adapté pour calculer la matrice d'adjacence de la fermeture transitive d'un graphe G orienté, c'est à dire du graphe G' tel que $ij \in E(G') \Leftrightarrow$ il existe un chemin de i à j dans G .

Algorithme de Warshall - Énoncé

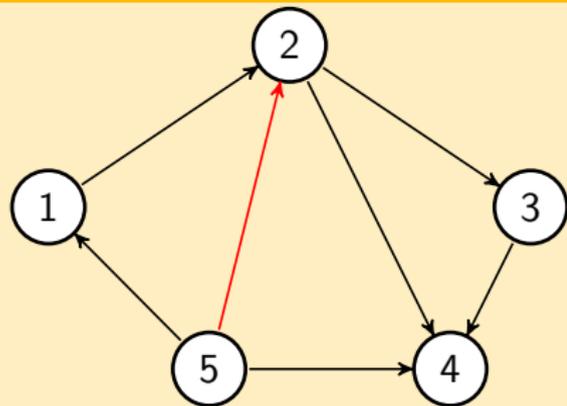
Voir document "Algorithmes des graphes" page 7.

Algorithme de Warshall - Exemple



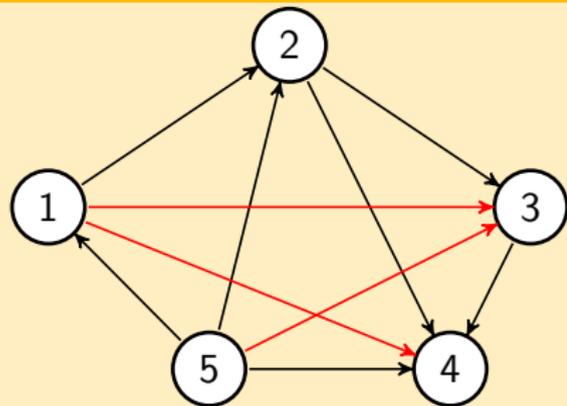
Fermeture transitive

Algorithme de Warshall - Exemple avec $k = 1$



Fermeture transitive

Algorithme de Warshall - Exemple avec $k = 2$



Algorithme de Warshall - Exemple avec $k = 3, 4$ et 5

Pour $k = 3$, il n'y a aucune modification car le sommet 3 est seulement relié à 4 et tous les autres sommets sont déjà reliés à 4.

Pour $k = 4$, pas de modification non plus car 4 n'a aucun successeur.

Pour $k = 5$, pas de modification non plus car 5 n'a aucun prédécesseur.

Algorithme de Warshall - Exemple

La fermeture transitive du graphe de gauche est donc le graphe de droite.

