Recherche Opérationnelle - Cours 2

Olivier Baudon

Université de Bordeaux

16 septembre 2024

Notations asymptotyques

Notation O ("grand o")

$O(g(n)) = \{f(n) | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq c \times g(n)\}$

Remarque : on ne notera pas $f(n) \in O(g(n))$, *mais*
$f(n) = O(g(n))$
Attention ! Cette notation "=" n'est pas symétrique !

Exemple

$3 * n^2 + 2 * n + 3 = O(n^2)$
Il suffit de prendre $c = 5$ et $n_0 = 2$.
On pourrait aussi dire que $3 * n^2 + 2 * n + 3 = O(n^3)$, *mais l'approximation est moins précise !*

Notations asymptotyques

Notation Ω

$\Omega(g(n)) = \{f(n) | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq c \times g(n) \leq f(n)\}$

Notation Θ

$\Theta(g(n)) = \{f(n) | \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1 \times g(n) \leq f(n) \leq c_2 \times g(n)\}$

Théorèmes

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$
$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n))$ et $f(n) = \Omega(g(n))$
$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n))$ et $g(n) = O(f(n))$

Complexité selon la représentation : Matrice d'adjacence

Existence d'une arête ou d'un arc entre deux sommets

A : matrice d'adjacence d'un graphe G orienté ou non
i, j : deux sommets de G
Teste si j est voisin ou successeur de i
SontVoisins(A, i, j**)** :

1: **retourner** $A[i, j] \neq 0$

Complexité : $O(1)$

Complexité selon la représentation - Matrice d'adjacence

Degré d'un sommet

A : matrice d'adjacence d'un graphe G non orienté
i : sommet de G
Degré(A, i) :

```
1: degre ← 0
2: pour j de 1 à n faire
3:     si i ≠ j alors
4:         degre ← degre + A[i, j]
5:     sinon
6:         degre ← degre + 2 × A[i, j]
7:     fin si
8: fin pour
9: retourner degre
```

Complexité : $O(n)$

Complexité selon la représentation - Matrice d'adjacence

Degrés de tous les sommets

A : matrice d'adjacence d'un graphe G non orienté

Degres(A) :

1: **pour** i de 1 à n **faire**
2: $\quad degre[i] \leftarrow 0$
3: $\quad$ **pour** j de 1 à n **faire**
4: $\quad\quad$ **si** $i \neq j$ **alors**
5: $\quad\quad\quad degre[i] \leftarrow degre[i] + A[i,j]$
6: $\quad\quad$ **sinon**
7: $\quad\quad\quad degre[i] \leftarrow degre[i] + 2 \times A[i,j]$
8: $\quad\quad$ **fin si**
9: $\quad$ **fin pour**
10: **fin pour**
11: **retourner** $degre$

Complexité : $O(n^2)$

Complexité selon la représentation : Matrice d'incidence

Existence d'une arête

B : matrice d'incidence d'un graphe G non orienté
i, j : deux sommets de G
SontVoisins(B, i, j) :

1: **pour** e de 1 à m **faire**
2: **si** $B[i, e] \neq 0$ **et** $B[j, e] \neq 0$ **alors**
3: **retourner** VRAI
4: **fin si**
5: **fin pour**
6: **retourner** FAUX

Complexité : $O(m)$
Pour tester l'existence d'un arc de i vers j, il suffit de remplacer la condition : $B[i, e] \neq 0$ et $B[j, e] \neq 0$ par : $B[i, e] = -1$ et $B[j, e] = 1$
Par contre, il est impossible avec la matrice d'incidence d'un graphe orienté de tester s'il existe une boucle sur un sommet i donné.

Complexité selon la représentation - Matrice d'incidence

Degré d'un sommet

B : matrice d'incidence d'un graphe G non orienté
i : sommet de G
Degré(B, i) :

1: $degre \leftarrow 0$
2: **pour** e de 1 à m **faire**
3: $\quad degre \leftarrow degre + B[i, e]$
4: **fin pour**
5: **retourner** $degre$

Complexité : $O(m)$

Complexité selon la représentation - Matrice d'incidence

Degrés de tous les sommets

B : matrice d'incidence d'un graphe G non orienté

Degres(A) :

1: **pour** i de 1 à n **faire**
2: $\quad degres[i] \leftarrow 0$
3: $\quad$ **pour** e de 1 à m **faire**
4: $\quad\quad degre[i] \leftarrow degre[i] + B[i, e]$
5: $\quad$ **fin pour**
6: **fin pour**
7: **retourner** $degres$

Complexité : $O(n \times m)$

Complexité selon la représentation : Listes d'adjacence

Existence d'une arête

G : un graphe (orienté ou non)
u, v : deux sommets de G
Teste si v est voisin ou successeur de u
SontVoisins(G, u, v) :

1: **pour tout** $w \in Adj(u)$ **faire**
2: **si** $w = v$ **alors**
3: **retourner** VRAI
4: **fin si**
5: **fin pour**
6: **retourner** FAUX

Complexité : $O(\Delta(G)) = O(n)$

Complexité selon la représentation : Listes d'adjacence

Degré d'un sommet

G : un graphe non orienté
u : un sommet de G
Degré(G, u) :

```
1: degre ← 0
2: pour tout v ∈ Adj(u) faire
3:     si v ≠ u alors
4:         degre(u) ← degre(u) + 1
5:     sinon
6:         degre(u) ← degre(u) + 2
7:     fin si
8: fin pour
9: retourner degre
```

Complexité : $O(\Delta(G)) = O(n)$

Complexité selon la représentation : Listes d'adjacence

Degrés de tous les sommets

G : un graphe non orienté
Degres(G) :

```
1:  pour tout u ∈ V(G) faire
2:      degres(u) ← 0
3:      pour tout v ∈ Adj(u) faire
4:          si v ≠ u alors
5:              degres(u) ← degres(u) + 1
6:          sinon
7:              degres(u) ← degres(u) + 2
8:          fin si
9:      fin pour
10: fin pour
11: retourner degres
```

Complexité : $O(n+m)$

Plus courts chemins

Problématiques

Soit G un graphe orienté et ω une fonction de poids sur les arcs de G.
Si G n'est pas orienté, on peut considérer chaque arête comme une paire d'arcs symétriques, sauf pour les boucles qui seront simplement orientées.

1. Quel est le plus court chemin pour aller de u à v ?
2. Quel est le plus court chemin d'un sommet u à tous les sommets du graphe ?
3. Quel est le plus court chemin entre toute paire de sommets ?

Plus courts chemins

Théorème

Il existe un plus court chemin de u à v dans (G, w) si et seulement si il existe un chemin de u à v et aucun chemin de u à v ne contient de circuit de longueur totale strictement négative.

Arborescence

L'ensemble des plus courts chemins à partir d'un sommet s forme une arborescence de racine s.
On notera par $d(v)$ la distance trouvée de s à v et par $\pi(v)$ le prédécesseur de v sur le chemin de s à v de longueur $d(v)$.

Plus courts chemins

Principe du relâchement

Soient
d la valeur du plus court chemin trouvé à l'instant t entre un sommet s et les sommets de G,
π les prédécesseurs de chaque sommet sur les plus courts chemins trouvés à l'instant t depuis le sommet s,
uv un arc de G,
Relacher(G, ω, u, v**)** :

1: **si** $d(u) + \omega(uv) < d(v)$ **alors**
2: $\quad d(v) \leftarrow d(u) + \omega(uv)$
3: $\quad \pi(v) \leftarrow u$
4: **fin si**

Algorithme de Dijkstra

Utilisation

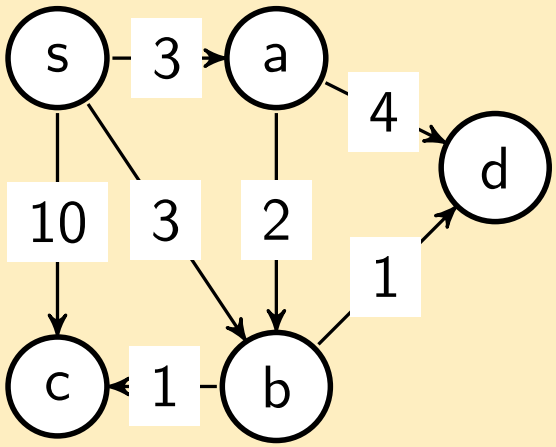
On peut utiliser l'algorithme de Dijkstra à condition que la fonction ω de pondération des arcs soit positive.

Énoncé

Voir document "Algorithmes des graphes" page 2.

Algorithme de Dijkstra

Exemple



Graphe G

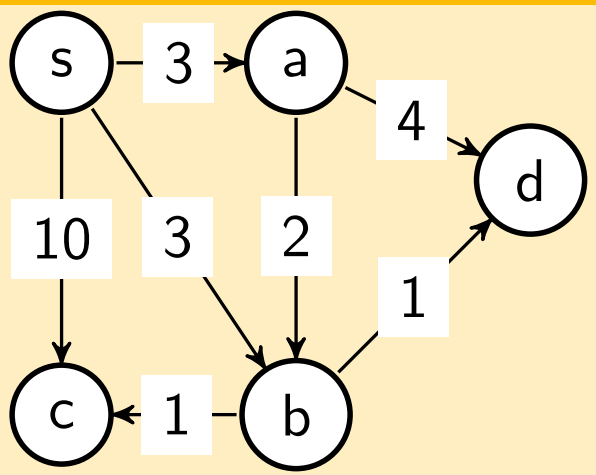
pivot	*s*	*a*	*b*	*c*	*d*
	0	∞	∞	∞	∞
s	0	3	3	10	∞
a	0	3	3	10	7
b	0	3	3	4	4
c	0	3	3	4	4
d	0	3	3	4	4

Dijkstra(G, ω, s)

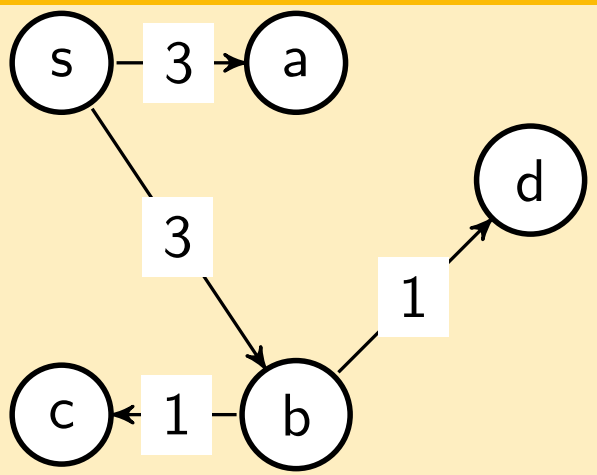
Remarque : $\pi(s) = \text{NIL}$ et $\pi(v)$ est le pivot quand $d(v)$ a été modifié pour la dernière fois.
Ici : $\pi(s) = NIL, \pi(a) = s, \pi(b) = s, \pi(c) = b, \pi(d) = b$.

Algorithme de Dijkstra

Exemple - Arborescence des plus courts chemins



Graphe G



Arborescence

Algorithme de Dijkstra

Complexité

Si la file de priorité est implémentée sous la forme d'une liste, alors la complexité de l'algorithme de Dijkstra est en $O(n^2 + m)$. Si G ne possède pas d'arcs parallèles, cela nous donne du $O(n^2)$.
Si le nombre d'arcs est faible par rapport à n^2, on a intérêt à implémenter la file de priorité à l'aide d'un tas binaire. Dans ce cas, la complexité de Dijkstra devient $O((n + m) \times \log(n))$.

Algorithme de Dijkstra

Validité

On note par $\delta(u)$ la plus courte distance entre s et u dans G.
On va montrer que $d(u) = \delta(u)$ à chaque fois qu'un sommet u est extrait de la file de priorité F.
Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit u le premier sommet extrait de F tel que $d(u) \neq \delta(u)$ à cet instant.
u ne peut pas être égal à s, car s est le premier sommet extrait de F et $d(s) = \delta(s) = 0$.
De plus, $d(u) \neq \infty$, sinon, u n'aurait pas été inséré dans F. Donc il existe lors de l'extraction de u un chemin de s à u de longueur $d[u] \neq \infty$ et donc il existe un plus court chemin dans G de longueur $\delta(u) \neq \infty$. Soit p ce chemin et soit y le premier sommet de p non extrait de F quand on extrait u. y existe, sinon on aurait $d(u) = \delta(u)$. Soit x le prédécesseur de y dans p. Comme x a été extrait de F avant u, cela signifie que $d(y) = \delta(y)$ quand on extrait u et comme $\delta(y) < \delta(u) < d[u]$, y aurait du être extrait de F avant u. Donc u n'existe pas !

Algorithme de Bellman

Utilisation

On peut utiliser l'algorithme de Bellman à condition que le graphe G soit sans circuit.
Dans ce cas, on peut obtenir un tri topologique sur les sommets de G, c'est à dire un ordre tel que si un arc va du sommet de rang i vers le sommet de rang j, alors $i < j$.

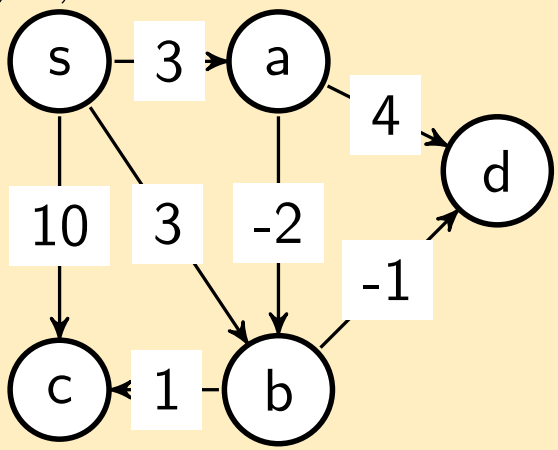
Énoncé

Voir document "Algorithmes des graphes" pages 3 et 4.

Algorithme de Bellman

Exemple

Le tri topologique de G donne deux ordres possibles : s, a, b, c, d et s, a, b, d, c.



Graphe G

u	s	a	b	c	d	*File*
	0	∞	∞	∞	∞	s
s	0	3	3	10	∞	a
a	0	3	1	10	7	b
b	0	3	1	2	0	cd
c	0	3	1	2	0	d
d	0	3	1	2	0	$\emptyset$

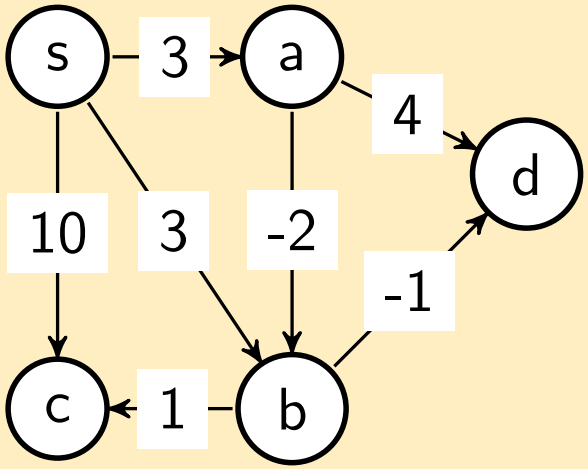
Bellman(G, ω, s)

Remarque : $\pi(s) = \text{NIL}$ et $\pi(v)$ est la tête de liste quand $d(v)$ a été modifié pour la dernière fois.

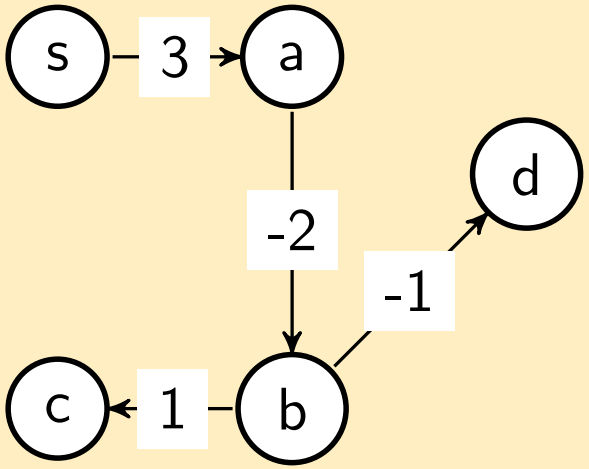
Ici : $\pi(s) = NIL, \pi(a) = s, \pi(b) = a, \pi(c) = b, \pi(d) = b$.

Algorithme de Bellman

Exemple - Arborescence des plus courts chemins



Graphe G



Arborescence

Algorithme de Bellman

Complexité

La complexité de l'algorithme de Bellman est en $O(n+m)$.

Validité

On a bien $d(s) = \delta(s)$
Si $v_1 = s, v_2, \dots v_k$ est l'ordre obtenu par le tri topologique, il est clair que si pour tout $j < i$, $d(v_j) = \delta(v_j)$, alors $d(v_i) = \delta(v_i)$.
Donc par récurrence, on a bien $\forall i, 1 \leq i \leq k, d(v_i) = \delta(v_i)$.

Graphe PERT

Objectifs

L'objectif d'un graphe PERT est d'aider à la gestion de projets, en identifiant les tâches pour lesquelles un retard entraînera un retard sur le projet global et pour les autres le temps que l'on peut rajouter à leur exécution sans retarder la fin du projet.

Graphe PERT

Modélisation

- Chaque tâche est représentée par un sommet.
- Deux sommets u et v sont reliés par un arc si la tâche u doit précéder la tâche v, l'arc uv ayant comme poids la durée de la tâche u ;

Modélisation - suite

On rajoute également deux sommets :

- un pour le début de projet, relié par un arc de poids 0 à tous les sommets représentant les débuts des tâches n'ayant aucune contrainte ;
- un pour la fin de projet auquel sont reliés tous les sommets représentant la fin des tâches n'étant une contrainte pour aucune autre.

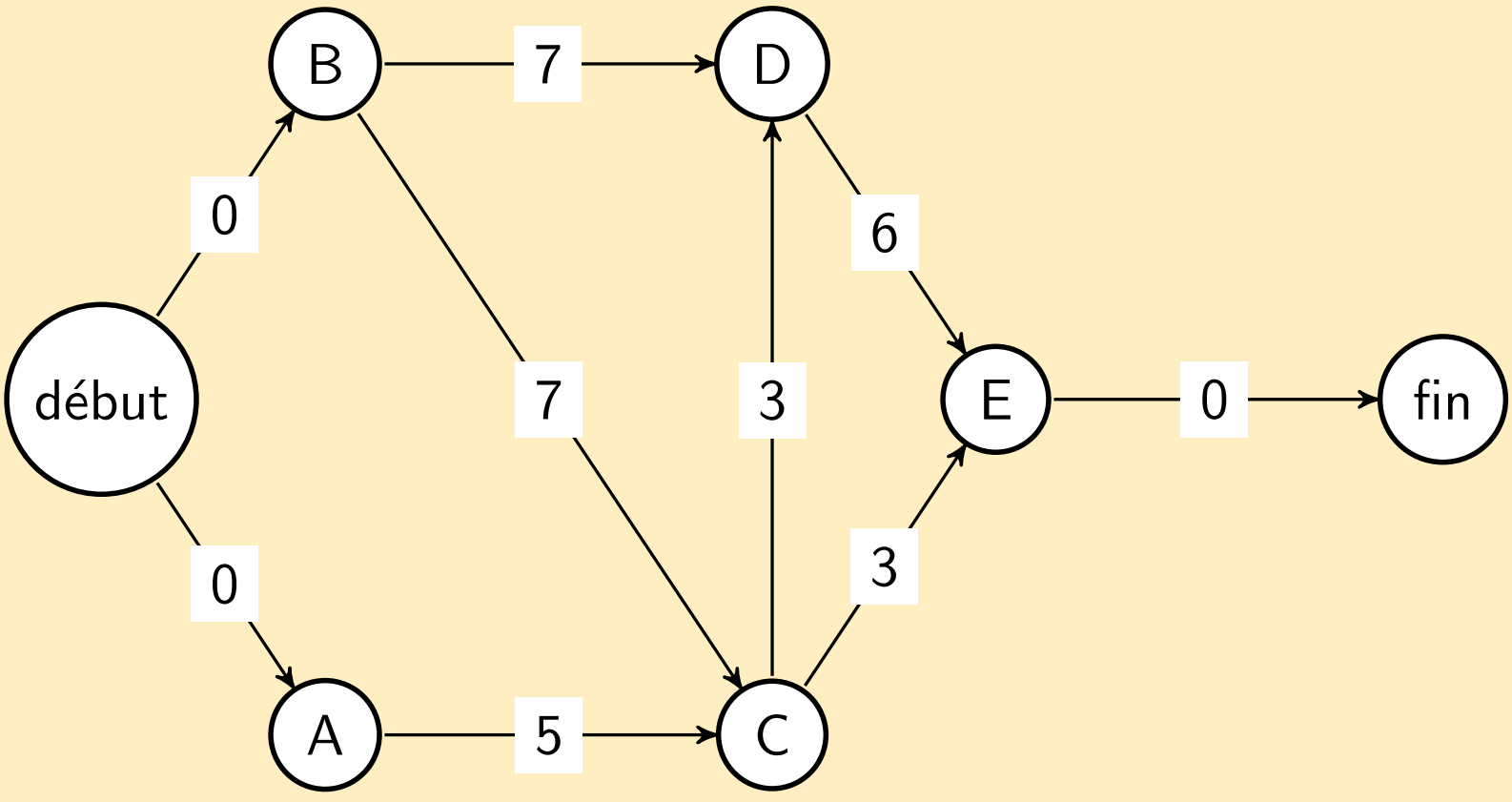
Exemple - Projet

Le projet est composé de 5 tâches : A, B, C, D, E.
Le tableau suivant donne pour chaque tâche t sa durée et les tâches devant être achevées avant de pouvoir commencer t. Le graphe est le graphe PERT associé.

tâche	durée	contraintes
A	5	
B	7	
C	3	A, B
D	6	B, C
E	4	C, D

Graphe PERT

Exemple - Graphe



Graphe PERT

Calculs

On peut tout d'abord remarquer que par essence, un graphe PERT est forcément sans circuit.
On va donc appliquer l'algorithme de Bellman, modifié, pour dans un premier temps calculer les plus longs chemins entre le début du projet et les autres noeuds, ce qui nous donnera les dates au plus tôt de chaque début de tâche.
On va ensuite re-appliquer l'algorithme de Bellman dans le graphe inverse, pour calculer les dates au plus tard, afin de savoir sur chaque tâche de quel délai on peut disposer pour la réaliser et déterminer les tâches critiques, c'est à dire les tâches où les dates au plus tôt et au plus tard sont égales, et donc pour lesquelles tout retard entrainera un retard du projet global.

Graphe PERT

Exemple - Calculs

Le tableau suivant donne les dates aux plus tôt et au plus tard de chaque début et fin de tâche.

tâche	date au plus tôt	date au plus tard
A	0	2
B	0	0
C	7	7
D	10	10
E	16	16

Graphe PERT

Exemple - Tâches critiques

La durée minimum du projet est de 20. Les tâches critiques sont B, C, D et E.