

## Feuille 2 - Graphes planaires

Un graphe *planaire* est un graphe que l'on peut dessiner dans le plan de telle sorte que les arêtes ne se croisent pas.

Soit  $G$  un graphe. On note par  $d_G(x)$  le degré d'un sommet  $x$  de  $G$ , ou plus simplement par  $d(x)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On rappelle que si  $n$  est le nombre de sommets d'un graphe  $G$  planaire connexe,  $m$  son nombre d'arêtes et  $f$  son nombre de faces dans une représentation dans le plan, on a la **formule d'Euler** :

$$n - m + f = 2$$

La longueur d'une face est le nombre d'arêtes à parcourir pour faire le tour de la face. Dans une face ne contenant pas d'isthme (arête dont la suppression déconnecte le graphe), c'est donc le nombre d'arêtes qui la délimite. Sinon, les isthmes doivent être comptés deux fois.

1. Vérifier la formule d'Euler et donner la longueur des faces du graphe de la figure 1.

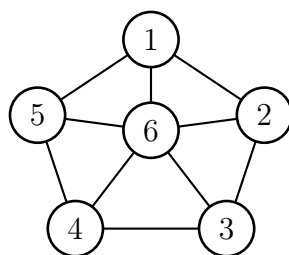


FIGURE 1 – Graphe planaire  $W$

2. Démontrer la formule d'Euler (*indication* : partir d'un arbre couvrant et rajouter ensuite les arêtes manquantes).
3. Montrer que si  $G$  est un graphe planaire simple sans isthme, la somme des longueurs des faces est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.
4. Montrer que si  $G$  est un graphe planaire simple, ayant au moins 3 sommets, alors  $m(G) \leq 3n(G) - 6$ .
5. En déduire que tout graphe planaire simple possède au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.
6. Quel est le nombre chromatique du graphe  $W$  de la figure 1 ?
7. Montrer que tout graphe planaire simple est 6-coloriable.
8. On veut maintenant montrer que tout graphe planaire est 5-coloriable (théorème de Heawood - 1890). Pour cela, on considère un graphe  $G$  contre-exemple minimal, c'est à dire que si on enlève un sommet de  $G$ , le graphe obtenu est 5-coloriable.
  - (a) Montrer que  $G$  ne possède pas de sommet de degré inférieur ou égal à 4.

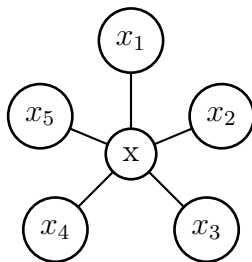


FIGURE 2 – Voisins de  $x$

On suppose donc que  $G$  ne possède aucun sommet de degré strictement inférieur à 5. Soit  $x$  tel que  $\deg(x) = 5$ . On suppose sans perte de généralité que les voisins de  $x$  sont, pour un dessin plan donné de  $G$ , dans l'ordre cyclique  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  (voir figure 2). Soit  $H$  le sous-graphe de  $G$  induit par  $V(G) \setminus \{x\}$ .  $H$  est donc 5-coloriable.

- (b) Montrer que les sommets  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  sont tous de couleur différente.
- (c) On suppose toujours sans perte de généralité que chaque sommet  $x_i$  parmi  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  est de couleur  $i$  et on note par  $H(i, j)$  le sous-graphe de  $H$  induit par les sommets coloriés  $i$  ou  $j$ . Montrer que deux sommets  $x_i, x_j$  appartiennent toujours à la même composante connexe de  $H(i, j)$ .
- (d) En déduire que  $x_1$  et  $x_3$  sont reliés par une chaîne de sommets coloriés 1 et 3 et  $x_2, x_4$  par une chaîne coloriée 2 et 4. Tracer ces chaînes sur la figure 2. Qu'en concluez-vous ?