

Examen du 6 mai 2025  
Aucun document autorisé

Traiter les deux parties sur des feuilles d'examen séparées.

## Partie *Graphes et Coloration*

### Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe  $G$  de la Figure 1 à partir du sommet  $a$ . En cas de choix dans la sélection d'un sommet, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique. Pour chaque itération, donner le sommet sélectionné et les modifications apportées aux étiquettes des sommets.
2. Le graphe  $G$  est-il triangulé? Justifier votre réponse.
3.  $G$  est-il un graphe d'intervalle? Pourquoi? Si oui, donner sa représentation sous forme d'intervalles.

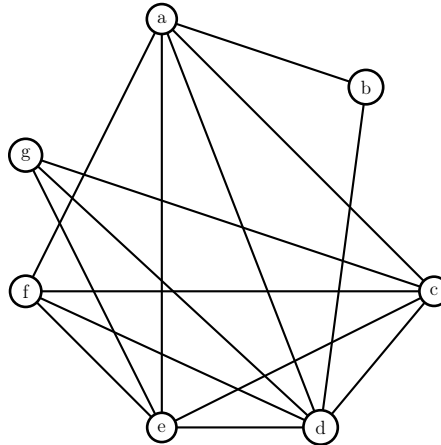


FIGURE 1 – Graphe  $G$

### Exercice 2

On considère un graphe  $G$  pondéré par une fonction de poids  $w$  associant à chaque sommet une valeur entière positive. Le poids d'un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V(G)$  est défini par

$$w(S) = \sum_{v \in S} w(v)$$

Une coloration par intervalles d'un graphe pondéré  $(G; w)$  associe à chaque sommet  $x$  un intervalle ouvert  $I_x$  de longueur  $w(x)$  de telle façon que deux sommets voisins soient associés à des intervalles disjoints. En d'autre terme,  $xy \in E(G) \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$ .

Le nombre de couleurs d'une coloration par intervalles d'un graphe pondéré  $(G; w)$  est la longueur totale des intervalles utilisés, soit  $|\cup_{x \in V(G)} I_x|$ . Le nombre chromatique d'intervalle  $\chi(G; w)$  d'un graphe pondéré  $(G; w)$  est le nombre de couleurs minimum pour colorier  $(G; w)$  par intervalles.

Par exemple, le graphe pondéré  $(G_1; w)$  de la figure 2 est 5-intervalle coloriable avec les intervalles suivant :  $I_a = ]3..5[$ ,  $I_b = ]0..3[$ ,  $I_c = ]3..4[$ .

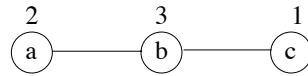


FIGURE 2 – Graphe pondéré  $(G_1; w)$

1. Pour quelle fonction de poids  $w$  le nombre chromatique d'intervalles  $\chi(G; w)$  est-il égal au nombre chromatique usuel  $\chi(G)$  ?
2. Montrer que le graphe pondéré  $(G_2, w)$  de la figure 3 possède une coloration par intervalles avec 10 couleurs.
3. Montrer que  $\chi(G_2; w) = 10$ .

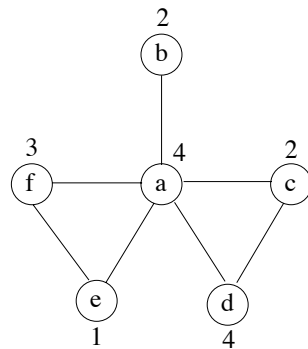


FIGURE 3 – Graphe pondéré  $(G_2; w)$

4. On considère l'orientation d'un graphe pondéré  $(G; w)$  obtenu à partir d'une intervalle coloration où une arête  $xy$  est orienté de  $x$  vers  $y$  si et seulement si  $I_x < I_y$  (la borne supérieure de  $I_x$  est inférieure ou égale à la borne inférieure de  $I_y$ ). Montrer que cette orientation est acyclique (ne contient pas de circuit).
5. Montrer que pour tout graphe pondéré  $(G; w)$ ,

$$\chi(G; w) = \min_F [\max_P (w(P))]$$

où  $F$  est une orientation acyclique de  $G$  et  $P$  un chemin de  $F$ . Pour cela, on utilisera deux fonctions  $hmin$  et  $hmax$  sur les sommets définies comme suit :

- $hmin(x) = 0$  si  $x$  n'a pas de successeur et  $hmin(x) = \max\{hmax(y), y \text{ successeur de } x\}$  sinon.
- $hmax(x) = hmin(x) + w(x)$

Soit  $(G; w)$  un graphe pondéré. On note  $\omega(G; w)$  la valeur

$$\omega(G; w) = \max\{w(K), K \text{ clique de } G\}$$

6. Montrer par induction sur le nombre de sommets que toute clique orienté possède un chemin élémentaire passant par tous ses sommets. En déduire que pour tout graphe pondéré  $(G; w)$ , on a  $\chi(G; w) \geq \omega(G; w)$ .

Un graphe  $G$  sera dit *super-parfait* si pour toute valuation  $w$  non négative sur ses sommets, on a  $\omega(G; w) = \chi(G; w)$ .

7. Montrer que tout sous-graphe induit d'un graphe super-parfait est super-parfait et que tout graphe super-parfait est parfait.
8. Soit  $F$  une orientation transitive d'un graphe  $G$ . On rappelle que  $F$  est une orientation transitive si et seulement si pour tout triplet de sommets  $x, y, z$ ,  $xy \in E(F)$  et  $yz \in E(F) \Rightarrow xz \in E(F)$ . Montrer que tout chemin de  $F$  est inclus dans une clique de  $G$ .
9. En déduire que tout graphe de comparabilité est super-parfait.