

Examen du 6 mai 2025
Aucun document autorisé

Partie *Graphes et Coloration*

Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe G de la Figure 1 à partir du sommet a . En cas de choix dans la sélection d'un sommet, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique. Pour chaque itération, donner le sommet sélectionné et les modifications apportées aux étiquettes des sommets.

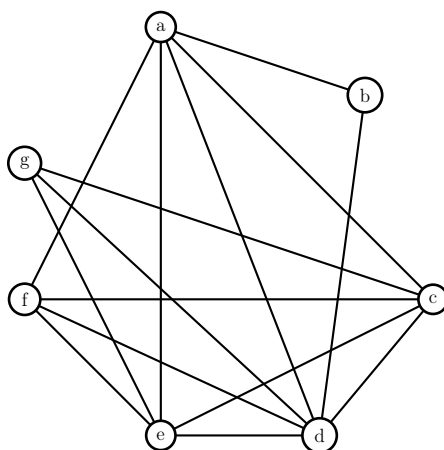


FIGURE 1 – Graphe G

Exécution de LexBFS

sommet choisi	a	b	c	d	e	f	g
a	X	7	7	7	7	7	
b		X		76			
d			75	X	75	75	5
c			X		754	754	54
e					X	7543	543
f						X	
g							X

2. Le graphe G est-il triangulé ? Justifier votre réponse.

L'ordre d'élimination obtenu par LexBFS est g, f, e, c, d, b, a . Lorsque l'on élimine chaque sommet dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $g : \{c, d, e\} \rightarrow K_3$
- $f : \{a, c, d, e\} \rightarrow K_4$
- $e : \{a, c, d\} \rightarrow K_3$
- $c : \{a, d\} \rightarrow K_2$
- $d : \{a, b\} \rightarrow K_2$
- $b : \{a\} \rightarrow K_1$
- $a : \emptyset$

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe est triangulé.

3. G est-il un graphe d'intervalle ? Pourquoi ? Si oui, donner sa représentation sous forme d'intervalles.

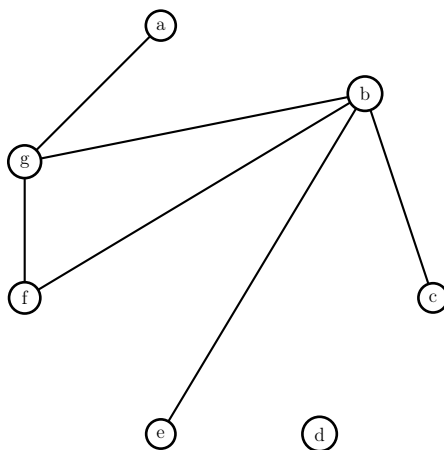


FIGURE 2 – Graphe $\overline{G}$

Le graphe complémentaire du graphe G est donné par la Figure 2. Ce graphe admet une orientation transitive. Par exemple ag, bc, be, bf, bg, fg .

Les intervalles correspondant sont donnés par la Figure 3.

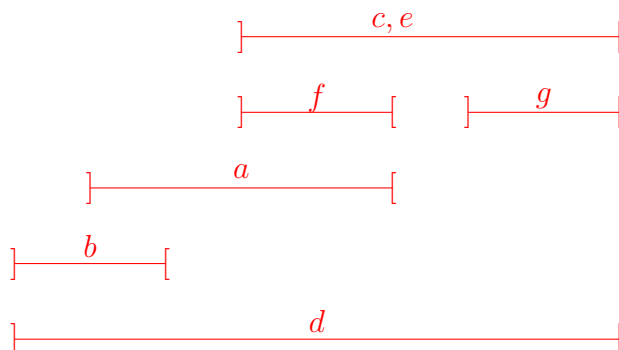


FIGURE 3 – Intervalles

Exercice 2

On considère un graphe G pondéré par une fonction de poids w associant à chaque sommet une valeur entière positive. Le poids d'un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V(G)$ est défini par

$$w(S) = \sum_{v \in S} w(v)$$

Une coloration par intervalles d'un graphe pondéré $(G; w)$ associe à chaque sommet x un intervalle ouvert I_x de longueur $w(x)$ de telle façon que deux sommets voisins soient associés à des intervalles disjoints. En d'autre terme, $xy \in E(G) \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$.

Le nombre de couleurs d'une coloration par intervalles d'un graphe pondéré $(G; w)$ est la longueur totale des intervalles utilisés, soit $|\cup_{x \in V(G)} I_x|$. Le nombre chromatique d'intervalle $\chi(G; w)$ d'un graphe pondéré $(G; w)$ est le nombre de couleurs minimum pour colorier $(G; w)$ par intervalles.

Par exemple, le graphe pondéré $(G_1; w)$ de la figure 4 est 5-intervalle coloriable avec les intervalles suivant : $I_a =]3..5[, I_b =]0..3[, I_c =]3..4[$.

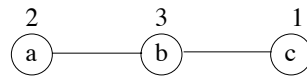


FIGURE 4 – Graphe pondéré $(G_1; w)$

1. Pour quelle fonction de poids w le nombre chromatique d'intervalles $\chi(G; w)$ est-il égal au nombre chromatique usuel $\chi(G)$?

Il suffit de prendre $w(x) = 1$ pour tout sommet x de G .

2. Montrer que le graphe pondéré (G_2, w) de la figure 5 possède une coloration par intervalles avec 10 couleurs.

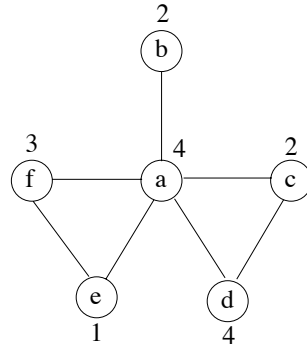


FIGURE 5 – Graphe pondéré $(G_2; w)$

On utilise la coloration suivante : $I_a =]0..4[, I_b =]4..6[, I_c =]4..6[, I_d =]6..10[, I_e =]4..5[, I_f =]5..8[$.

3. Montrer que $\chi(G_2; w) = 10$.

Pour colorier la clique $\{a, c, d\}$, il faudra des intervalles dont l'union sera de longueur au moins $w(a) + w(c) + w(d) = 10$. Donc $\chi(G_2; w) \geq 10$ et, comme d'après la question précédente on a $\chi(G_2; w) \leq 10$, on obtient le résultat.

4. On considère l'orientation d'un graphe pondéré $(G; w)$ obtenu à partir d'une intervalle coloration où une arête xy est orienté de x vers y si et seulement si $I_x < I_y$ (la borne supérieure de I_x est inférieure ou égale à la borne inférieure de I_y). Montrer que cette orientation est acyclique (ne contient pas de circuit).

Supposons que l'on ait un circuit $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$. Notons $I_i =]a_i..b_i[$ l'intervalle associé au sommet v_i . Alors, on a $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k \leq a_1$, soit $a_1 < a_1$, ce qui est impossible. Donc l'orientation est acyclique.

5. Montrer que pour tout graphe pondéré $(G; w)$,

$$\chi(G; w) = \min_F [\max_P (w(P))]$$

où F est une orientation acyclique de G et P un chemin de F . Pour cela, on utilisera deux fonctions $hmin$ et $hmax$ sur les sommets définies comme suit :

- $hmin(x) = 0$ si x n'a pas de successeur et $hmin(x) = \max\{hmax(y), y \text{ successeur de } x\}$ sinon.
- $hmax(x) = hmin(x) + w(x)$

Si à tout sommet v , on associe comme intervalle $I_v =]hmin(v)..hmax(v)[$, on obtient bien une coloration par intervalle. En effet, pour tout arc uv , $hmin(u) \geq hmax(v)$ et donc $I_u \cap I_v = \emptyset$. De plus, pour tout sommet v , $hmax(v) - hmin(v) = w(v)$. De plus, si v est le sommet de G tel que $hmax(v)$ soit maximum, alors $hmax(v) = \max\{w(P), P \text{ chemin de } G\}$ (en fait, le chemin P de poids total maximum part de v). Cette propriété est vraie quelque soit l'orientation F et donc :

$$\chi(G; w) \leq \min_F [\max_P (w(P))]$$

D'autre part, considérons une coloration optimale. Si on oriente les arêtes comme dans la question 4, on obtient une orientation acyclique et la longueur totale des intervalles utilisés est au moins égale au poids total de chaque chemin. Donc

$$\chi(G; w) \geq \min_F [\max_P (w(P))]$$

On a donc la double inégalité et donc

$$\chi(G; w) = \min_F [\max_P (w(P))]$$

Soit $(G; w)$ un graphe pondéré. On note $\omega(G; w)$ la valeur

$$\omega(G; w) = \max\{w(K), K \text{ clique de } G\}$$

6. Montrer par induction sur le nombre de sommets que toute clique orientée possède un chemin élémentaire passant par tous ses sommets. En déduire que pour tout graphe pondéré $(G; w)$, on a $\chi(G; w) \geq \omega(G; w)$.

La propriété est vraie pour toute clique orientée à 1 sommet. Supposons qu'elle soit vraie pour toute clique orientée ayant au plus $n - 1$ sommets avec $n \geq 2$. Soit T_n un graphe complet orienté à n sommets. Soit u un sommet de T_n . Si on enlève u de T_n , on obtient une clique orientée à $n - 1$ sommets, qui contient donc un chemin passant par tous ses sommets.

Soit $P = v_1, \dots, v_{n-1}$ ce chemin.

Si l'arc entre u et v_1 est uv_1 , on peut rajouter u au début de P .

S'il existe un sommet v_i tel que les arcs entre v_i, v_{i+1} et u sont $v_i u$ et uv_{i+1} , alors, on peut rajouter u entre v_i et v_{i+1} dans P .

Si l'arc entre u et v_1 est orienté de v_1 vers u , ce cas arrivera sauf si tous les arcs entre les sommets de P et u sont orientés vers u . Mais dans ce cas là, c'est aussi le cas pour v_{n-1} et donc on peut ajouter u à la fin de P . Par conséquent, la propriété est vraie pour tout graphe complet.

Dans la question précédente, on a montré que $\chi(G; w) = \min_F [\max_P (w(P))]$. Comme pour toute orientation F , chaque clique possède un chemin qui contient tous ses sommets, on a bien $\chi(G; w) \geq \omega(G; w)$.

Un graphe G sera dit *super-parfait* si pour toute valuation w non négative sur ses sommets, on a $\omega(G; w) = \chi(G; w)$.

7. Montrer que tout sous-graphe induit d'un graphe super-parfait est super-parfait et que tout graphe super-parfait est parfait.

Soit G un graphe super-parfait.

Soit $S \subseteq V(G)$ et G_S le sous-graphe de G induit par S . Soit w une valuation non négative des sommets de S . On considère une valuation w' sur G avec $w'(v) = w(v)$ si $v \in S$, 0 sinon. On a $\omega(G_S; w) = \omega(G; w') = \chi(G; w') = \chi(G_S; w)$. Donc G_S est super-parfait.

D'autre part, si l'on prend une valuation w de S avec $w(v) = 1$ pour tout sommet v de S , on a $\omega(G_S) = \omega(G_S; w) = \chi(G_S; w) = \chi(G_S)$. Comme c'est vrai pour tout sous-graphe induit de G , on a donc G parfait.

8. Soit F une orientation transitive d'un graphe G . On rappelle que F est une orientation transitive si et seulement si pour tout triplet de sommets x, y, z , $xy \in E(F)$ et $yz \in E(F) \Rightarrow xz \in E(F)$. Montrer que tout chemin de F est inclus dans une clique de G .

Soit $P = v_1, \dots, v_k$ un chemin de G dans une orientation transitive F de G . Par transitivité, v_1 possède un arc vers tous les sommets $v_2, \dots, v_k$ et de même, pour tout i , v_i possède un arc vers tout sommet v_j avec $j > i$. Donc $\{v_1, \dots, v_k\}$ induit un tournoi transitif de l'orientation de G et donc une clique de G .

9. En déduire que tout graphe de comparabilité est super-parfait.

Tout graphe de comparabilité admet une orientation transitive. A partir de cette orientation, et d'une valuation des sommets w , on choisit les intervalles en utilisant les fonctions $hmin$ et $hmax$ de la question 5. Tout chemin étant inclus dans une clique, on a bien $\chi(G; w) = \omega(G; w)$.