

Examen du 6 mai 2024 - Partie Graphes et coloration

Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe G de la Figure 1 à partir du sommet a . En cas de choix dans la sélection d'un sommet, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique. Pour chaque itération, donner le sommet sélectionné et les modifications apportées aux étiquettes des sommets.
2. Le graphe G est-il triangulé? Justifier votre réponse.
3. G est-il un graphe d'intervalle? Pourquoi? Si oui, donner sa représentation sous forme d'intervalles.

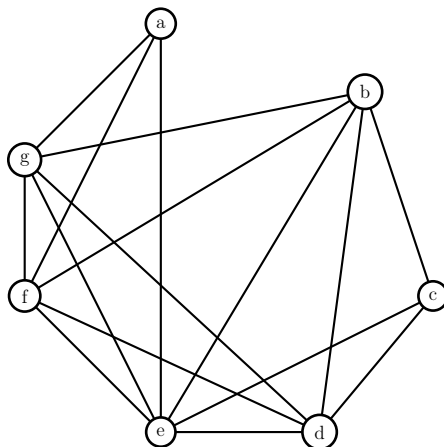


FIGURE 1 – Graphe G

Exercice 2

Le graphe K_n désigne le graphe complet à n sommets, S_n le stable (graphe sans arête) à n sommets, P_n la chaîne à n sommets.

Un *cographe* est un graphe simple (sans boucle, ni arête multiple) obtenu à l'aide du schéma inductif suivant :

- K_1 est un cographe ;
- si $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont des cographes avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, alors le graphe $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, noté $G_1 + G_2$ est un cographe ;
- si $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont des cographes avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, alors le graphe $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\})$, noté $G_1 \times G_2$ est un cographe.

En d'autres termes, le graphe simple à un sommet est un cographe et on peut produire un nouveau cographe en faisant l'union de deux cographes existants et en rajoutant ou non toutes les arêtes entre les sommets du premier graphe et les sommets du second.

Par exemple, tous les graphes simples à 2 sommets sont des cographes. En effet, $S_2 = K_1 + K_1$ et $K_2 = K_1 \times K_1$.

1. Montrer que tous les graphes simples à 3 sommets sont des cographes.

Indication : les questions suivantes utilisent principalement l'induction. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

2. Rappeler la définition d'un graphe parfait. Montrer que tout cocomplete est parfait.
3. Montrer que si G est un cocomplete, alors tous ses sous-graphes induits sont également des cocomplices.
4. Montrer que G est un cocomplete si et seulement si son complémentaire \overline{G} est un cocomplete.
En déduire que l'on peut construire tous les cocomplices à partir de K_1 en utilisant les opérateurs $+$ et complément. En d'autres termes, que l'on peut utiliser comme schéma d'induction :
 - K_1 est un cocomplete ;
 - si $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont des cocomplices, alors le graphe $G_1 + G_2$ est un cocomplete ;
 - si G est un cocomplete, alors \overline{G} est un cocomplete.
5. Montrer que tout cocomplete G ne possède pas P_4 comme sous-graphe induit, c'est à dire que si v_1, v_2, v_3, v_4 est une chaîne de G alors G contient au moins une arête parmi $(v_1, v_3), (v_1, v_4)$ ou (v_2, v_4) . *Pour information, la réciproque est également vraie.*
6. Montrer que tout cocomplete est un graphe de comparabilité.