

Examen du 6 mai 2024 - Partie Graphes et coloration

Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe  $G$  de la Figure 1 à partir du sommet  $a$ . En cas de choix dans la sélection d'un sommet, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique. Pour chaque itération, donner le sommet sélectionné et les modifications apportées aux étiquettes des sommets.

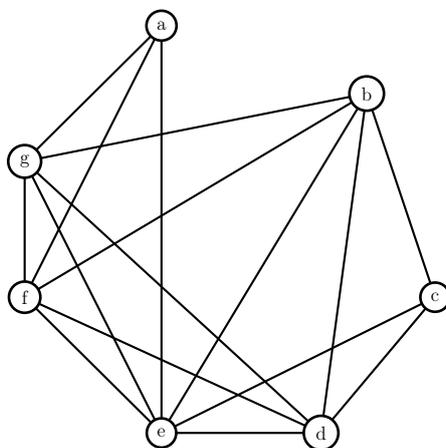


FIGURE 1 – Graphe  $G$

Exécution de LexBFS

sommet choisi	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$a$	X				7	7	7
$e$		6	6	6	X	76	76
$f$		65		65		X	765
$g$		654		654			X
$b$		X	63	6543			
$d$			632	X			
$c$			X				

2. Le graphe  $G$  est-il triangulé? Justifier votre réponse.

L'ordre d'élimination obtenu par LexBFS est  $c, d, b, g, f, e, a$ . Lorsque l'on élimine chaque sommet dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $c : \{b, d, e\} \rightarrow K_3$
- $d : \{b, e, f, g\} \rightarrow K_4$
- $b : \{e, f, g\} \rightarrow K_3$
- $g : \{a, e, f\} \rightarrow K_3$
- $f : \{a, e\} \rightarrow K_2$
- $e : \{a\} \rightarrow K_1$
- $a : \emptyset$

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe est triangulé.

3.  $G$  est-il un graphe d'intervalle? Pourquoi? Si oui, donner sa représentation sous forme d'intervalles.

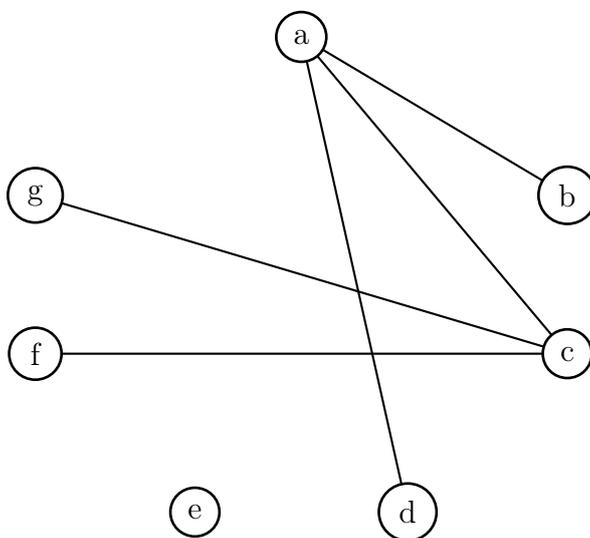


FIGURE 2 – Graphe  $\overline{G}$

Le graphe complémentaire du graphe  $G$  est donné par la figure 2. Ce graphe admet une orientation transitive. Par exemple  $ab, ac, ad, fc, gc$ .

Les intervalles correspondant sont donnés par la figure 3.

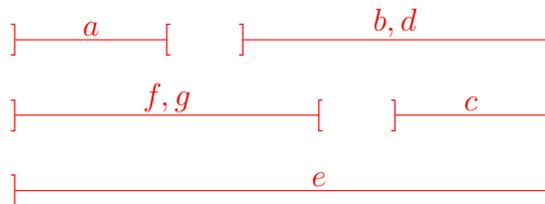


FIGURE 3 – Intervalles

### Exercice 2

Le graphe  $K_n$  désigne le graphe complet à  $n$  sommets,  $S_n$  le stable (graphe sans arête) à  $n$  sommets,  $P_n$  la chaîne à  $n$  sommets.

Un *cographe* est un graphe simple (sans boucle, ni arête multiple) obtenu à l'aide du schéma inductif suivant :

- $K_1$  est un cographe ;
- si  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  sont des cographes avec  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , alors le graphe  $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ , noté  $G_1 + G_2$  est un cographe ;
- si  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  sont des cographes avec  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , alors le graphe  $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\})$ , noté  $G_1 \times G_2$  est un cographe.

En d'autres termes, le graphe simple à un sommet est un cographe et on peut produire un nouveau cographe en faisant l'union de deux cographes existants et en rajoutant ou non toutes les arêtes entre les sommets du premier graphe et les sommets du second.

Par exemple, tous les graphes simples à 2 sommets sont des cographes. En effet,  $S_2 = K_1 + K_1$  et  $K_2 = K_1 \times K_1$ .

1. Montrer que tous les graphes simples à 3 sommets sont des cographes.

Il existe 4 graphes simples (à un isomorphisme près) à 3 sommets, dessinés dans l'ordre dans la Figure 4 :  $S_3 = S_2 + S_1$ ,  $K_2 + K_1$ ,  $P_3 = K_1 \times S_2$ ,  $K_3 = K_2 \times K_1$ .

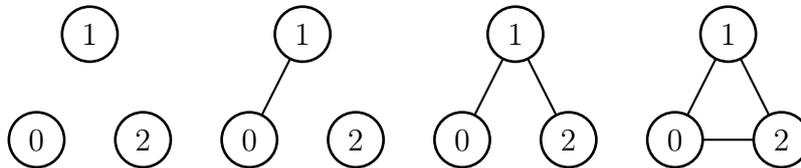


FIGURE 4 – Cographes d'ordre 3

*Indication : les questions suivantes utilisent principalement l'induction. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.*

2. Rappeler la définition d'un graphe parfait. Montrer que tout cographe est parfait.

Un graphe  $G = (V, E)$  est parfait si et seulement si pour tout  $S \subseteq V$ , le sous-graphe induit  $G_S$  est tel que  $\chi(G_S) = \omega(G_S)$ .

Tous les cographes à 1 sommet sont parfaits. Supposons que tous les cographes ayant au plus  $n - 1$  sommets, avec  $n \geq 2$ , soient parfaits.

Soit  $G = (V, E)$  un cographe à  $n$  sommets formé à partir de deux cographes  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$ .

Comme  $|V_1| \leq n - 1$  et  $|V_2| \leq n - 1$ , par hypothèse d'induction,  $G_1$  et  $G_2$  sont parfaits. Soit  $S \subseteq V$  et  $S_1 = S \cap V_1$  et  $S_2 = S \cap V_2$ . Si  $S_1 = \emptyset$  ou  $S_2 = \emptyset$  alors  $G_S$  est un sous-graphe de  $G_1$  ou  $G_2$ . Donc  $\chi(G_S) = \omega(G_S)$ .

On suppose donc que  $S_1 \neq \emptyset$  et  $S_2 \neq \emptyset$ .

- (a) Supposons que  $G = G_1 + G_2$ . On a  $\chi(G_S) = \max\{\chi(G_1_{S_1}), \chi(G_2_{S_2})\}$  et  $\omega(G_S) = \max\{\omega(G_1_{S_1}), \omega(G_2_{S_2})\}$ .

Or par hypothèse d'induction,  $G_1$  et  $G_2$  sont parfaits. Donc  $\chi(G_1_{S_1}) = \omega(G_1_{S_1})$  et  $\chi(G_2_{S_2}) = \omega(G_2_{S_2})$ .

Donc  $\max\{\chi(G_1_{S_1}), \chi(G_2_{S_2})\} = \max\{\omega(G_1_{S_1}), \omega(G_2_{S_2})\}$  et donc  $\chi(G_S) = \omega(G_S)$ .

- (b) Sinon  $G = G_1 \times G_2$ . Dans ce cas,  $\chi(G_S) \leq \chi(G_1_{S_1}) + \chi(G_2_{S_2})$ . Il suffit de colorier  $G_1$  et  $G_2$  de façon optimale, mais avec deux ensembles de couleurs disjoints.

$\omega(G_S) \geq \omega(G_1_{S_1}) + \omega(G_2_{S_2})$  car si  $C_1$  est un ensemble de sommets de  $G_1$  formant une clique et  $C_2$  est un ensemble de sommets de  $G_2$  formant une clique, alors  $C_1 \cup C_2$  forme une clique de  $G$ .

Donc  $\chi(G_S) \leq \chi(G_1_{S_1}) + \chi(G_2_{S_2}) = \omega(G_1_{S_1}) + \omega(G_2_{S_2}) \leq \omega(G_S)$ . Donc  $\chi(G_S) = \omega(G_S)$ .

Conclusion :  $G$  est parfait et donc par induction, tout cographe est parfait.

3. Montrer que si  $G$  est un cographe, alors tous ses sous-graphes induits sont également des cographes.

L'hypothèse est vraie pour tout cographe ayant au plus 1 sommet. Supposons qu'elle soit vraie pour tout cographe d'ordre au plus  $n - 1$  avec  $n \geq 2$ .

Soit  $G = (V, E)$  un cographe à  $n$  sommets formé à partir de deux cographes  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$ .

Comme  $|V_1| \leq n - 1$  et  $|V_2| \leq n - 1$ , tout sous-graphe de  $G_1$  et tout sous-graphe de  $G_2$  est un cographe. Soit  $S \subseteq V$  et  $S_1 = S \cap V_1$  et  $S_2 = S \cap V_2$ . Si  $S_1 = \emptyset$  ou  $S_2 = \emptyset$  alors  $G_S$  est un sous-graphe de  $G_1$  ou  $G_2$ . Donc  $G_S$  est un cographe.

On suppose donc que  $S_1 \neq \emptyset$  et  $S_2 \neq \emptyset$ .

- (a) Supposons que  $G = G_1 + G_2$ . Par hypothèse d'induction,  $G_{1S_1}$  et  $G_{2S_2}$  sont des cographes. Or  $G_S = G_{1S_1} + G_{2S_2}$ . Donc  $G_S$  est un cographe.
- (b) Sinon  $G = G_1 \times G_2$ . Par hypothèse d'induction,  $G_{1S_1}$  et  $G_{2S_2}$  sont des cographes. Or  $G_S = G_{1S_1} \times G_{2S_2}$ . Donc  $G_S$  est un cographe.

Conclusion : pour tout  $S \subseteq V$ ,  $G_S$  est un cographe et donc par induction, tout sous-graphe induit d'un cographe est un cographe.

4. Montrer que  $G$  est un cographe si et seulement si son complémentaire  $\overline{G}$  est un cographe.

L'hypothèse est vraie pour tout cographe ayant au plus 1 sommet. Supposons qu'elle soit vraie pour tout cographe d'ordre au plus  $n - 1$  avec  $n \geq 2$ .

Soit  $G = (V, E)$  un cographe à  $n$  sommets formé à partir de deux cographes  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$ .

- (a) Supposons que  $G = G_1 + G_2$ . Alors  $\overline{G} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$ .  
Par hypothèse d'induction,  $\overline{G_1}$  et  $\overline{G_2}$  sont des cographes. Donc  $\overline{G}$  est un cographe.
- (b) Sinon  $G = G_1 \times G_2$ . Alors  $\overline{G} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$ .  
Par hypothèse d'induction,  $\overline{G_1}$  et  $\overline{G_2}$  sont des cographes. Donc  $\overline{G}$  est un cographe.

Conclusion :  $\overline{G}$  est un cographe et donc par induction, tout complémentaire d'un cographe est un cographe.

En déduire que l'on peut construire tous les cographes à partir de  $K_1$  en utilisant les opérateurs + et complément. En d'autres termes, que l'on peut utiliser comme schéma d'induction :

- $K_1$  est un cographe ;
- si  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  sont des cographes, alors le graphe  $G_1 + G_2$  est un cographe ;
- si  $G$  est un cographe, alors  $\overline{G}$  est un cographe.

D'après la question précédente, tout graphe produit par ce schéma d'induction est un cographe. Inversement, soit  $G$  un cographe. Si  $n(G) \geq 2$  alors il existe deux cographes  $G_1$  et  $G_2$  tels que  $G = G_1 + G_2$  ou  $G = G_1 \times G_2$ .

Si  $G = G_1 + G_2$  alors  $G$  sera bien produit par le nouveau schéma.

Sinon  $G = G_1 \times G_2 = \overline{\overline{G_1}} + \overline{\overline{G_2}}$ . Donc  $G$  sera également produit par le nouveau schéma.

Conclusion, tout cographe peut être produit par ce nouveau schéma et donc les deux schémas sont équivalents.

5. Montrer que tout cographe  $G$  ne possède pas  $P_4$  comme sous-graphe induit, c'est à dire que si  $v_1, v_2, v_3, v_4$  est une chaîne de  $G$  alors  $G$  contient au moins une arête parmi  $(v_1, v_3), (v_1, v_4)$  ou  $(v_2, v_4)$ .

L'hypothèse est vraie pour tout cographe ayant au plus 3 sommets. Supposons qu'elle soit vraie pour tout cographe d'ordre  $n - 1$  avec  $n \geq 4$ .

Soit  $G = (V, E)$  un cographe à  $n$  sommets formé à partir de deux cographes  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$ .

- (a) Supposons que  $G = G_1 + G_2$ . Par hypothèse d'induction, ni  $G_1$  ni  $G_2$  ne possèdent  $P_4$  comme sous-graphe induit. Il en est donc de même pour  $G$ .

- (b) Sinon  $G = G1 \times G2$ . Alors  $\overline{G} = \overline{G1} + \overline{G2}$ .  
 $\overline{G1}$  et  $\overline{G2}$  sont des cographe. Donc par hypothèse d'induction ni  $\overline{G1}$  ni  $\overline{G2}$ . ne possèdent  $P_4$  comme sous-graphe induit et il en est donc de même pour  $\overline{G}$ .  
 Or  $\overline{P_4} = P_4$ . Donc  $G$  est également sans  $P_4$  comme sous-graphe induit.

Conclusion :  $G$  ne possède pas  $P_4$  comme sous-graphe induit et donc par induction, c'est vrai pour tout cographe.

6. Montrer que tout cographe est un graphe de comparabilité.

L'hypothèse est vraie pour tout cographe ayant au plus 1 sommet. Supposons qu'elle soit vraie pour tout cographe d'ordre au plus  $n - 1$  avec  $n \geq 2$ .

Soit  $G = (V, E)$  un cographe à  $n$  sommets formé à partir de deux cographe  $G1 = (V1, E1)$  et  $G2 = (V2, E2)$ .

Par hypothèse d'induction,  $G1$  et  $G2$  sont des graphes de comparabilité. Soit  $(V1, F1)$  et  $(V2, F2)$  des orientations transitives respectivement de  $G1$  et  $G2$ .

- (a) Supposons que  $G = G1 + G2$ . Alors  $(V1 \cup V2, F1 \cup F2)$  est une orientation transitive de  $G$ . Donc  $G$  est un graphe de comparabilité.
- (b) Sinon  $G = G1 \times G2$ . Soit  $F$  une orientation des arêtes de  $G$  avec  $F = F1 \cup F2 \cup \{(v1, v2) | v1 \in V1, v2 \in V2\}$ . En d'autres termes, toutes les arêtes entre  $V1$  et  $V2$  sont orientées de  $V1$  vers  $V2$ .

Soit  $(u, v)$  et  $(v, w)$  deux arcs consécutifs de  $G$ .

Si  $u, v, w \in V1$ , comme  $F1$  est une orientation transitive, l'arc  $(u, w) \in F1$ .

Idem si  $u, v, w \in V2$ .

On ne peut pas avoir  $u \in V2$  et  $w \in V1$  car il n'existe aucun arc entre  $V2$  et  $V1$ .

Les seuls cas restant possibles sont donc  $u \in V1, v \in V1$  et  $w \in V2$  ou  $u \in V1, v \in V2$  et  $w \in V2$ . Comme tous les arcs possibles entre  $V1$  et  $V2$  existent, on a bien  $(u, w) \in F$ .

Donc  $F$  est bien une orientation transitive de  $G$  et donc  $G$  est de comparabilité.

Conclusion :  $G$  est un graphe de comparabilité et donc par induction, tout cographe est de comparabilité.