

Examen du 6 mai 2024 - Partie Graphes et coloration

Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe G de la Figure 1 à partir du sommet a . En cas de choix dans la sélection d'un sommet, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique. Pour chaque itération, donner le sommet sélectionné et les modifications apportées aux étiquettes des sommets.

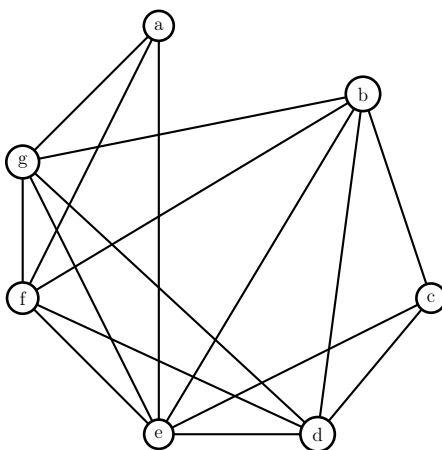


FIGURE 1 – Graphe G

Exécution de LexBFS

sommet choisi	a	b	c	d	e	f	g
a	X				7	7	7
e		6	6	6	X	76	76
f		65		65		X	765
g		654		654			X
b		X	63	6543			
d			632	X			
c			X				

2. Le graphe G est-il triangulé? Justifier votre réponse.

L'ordre d'élimination obtenu par LexBFS est c, d, b, g, f, e, a . Lorsque l'on élimine chaque sommet dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $c : \{b, d, e\} \rightarrow K_3$
- $d : \{b, e, f, g\} \rightarrow K_4$
- $b : \{e, f, g\} \rightarrow K_3$
- $g : \{a, e, f\} \rightarrow K_3$
- $f : \{a, e\} \rightarrow K_2$
- $e : \{a\} \rightarrow K_1$
- $a : \emptyset$

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe est triangulé.

3. G est-il un graphe d'intervalle? Pourquoi? Si oui, donner sa représentation sous forme d'intervalles.

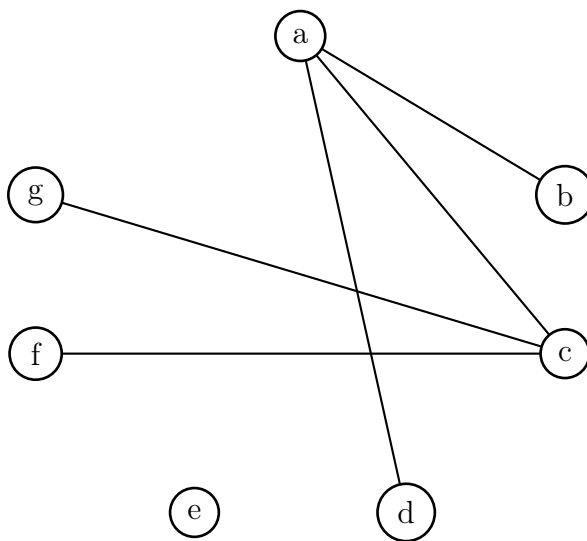


FIGURE 2 – Graphe \overline{G}

Le graphe complémentaire du graphe G est donné par la figure 2. Ce graphe admet une orientation transitive. Par exemple ab, ac, ad, fc, gc .

Les intervalles correspondant sont donnés par la figure 3.

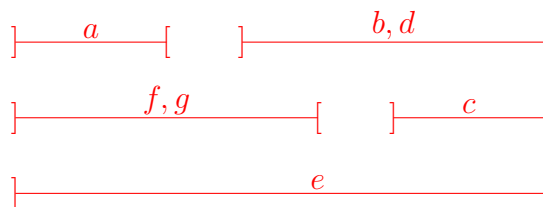


FIGURE 3 – Intervalles

Exercice 2

Le graphe K_n désigne le graphe complet à n sommets, S_n le stable (graphe sans arête) à n sommets, P_n la chaîne à n sommets.

Un *cographe* est un graphe simple (sans boucle, ni arête multiple) obtenu à l'aide du schéma inductif suivant :

- K_1 est un cographe ;
- si $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont des cographes avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, alors le graphe $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, noté $G_1 + G_2$ est un cographe ;
- si $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont des cographes avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, alors le graphe $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\})$, noté $G_1 \times G_2$ est un cographe.

En d'autres termes, le graphe simple à un sommet est un cographe et on peut produire un nouveau cographe en faisant l'union de deux cographes existants et en rajoutant ou non toutes les arêtes entre les sommets du premier graphe et les sommets du second.

Par exemple, tous les graphes simples à 2 sommets sont des cographes. En effet, $S_2 = K_1 + K_1$ et $K_2 = K_1 \times K_1$.

1. Montrer que tous les graphes simples à 3 sommets sont des cographes.

Il existe 4 graphes simples (à un isomorphisme près) à 3 sommets, dessinés dans l'ordre dans la Figure 4 : $S_3 = S_2 + S_1$, $K_2 + K_1$, $P_3 = K_1 \times S_2$, $K_3 = K_2 \times K_1$.

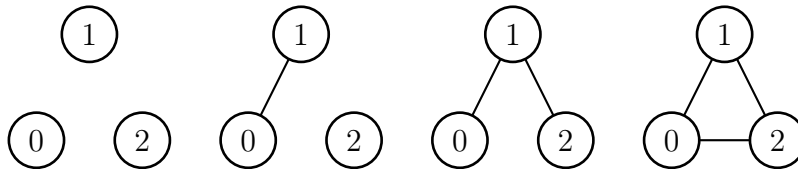


FIGURE 4 – Cographes d'ordre 3

Indication : les questions suivantes utilisent principalement l'induction. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

2. Rappeler la définition d'un graphe parfait. Montrer que tout cographe est parfait.

Un graphe $G = (V, E)$ est parfait si et seulement si pour tout $S \subseteq V$, le sous-graphe induit G_S est tel que $\chi(G_S) = \omega(G_S)$.

Tous les cographes à 1 sommet sont parfaits. Supposons que tous les cographes ayant au plus $n - 1$ sommets, avec $n \geq 2$, soient parfaits.

Soit $G = (V, E)$ un cographe à n sommets formé à partir de deux cographes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$.

Comme $|V_1| \leq n - 1$ et $|V_2| \leq n - 1$, par hypothèse d'induction, G_1 et G_2 sont parfaits. Soit $S \subseteq V$ et $S_1 = S \cap V_1$ et $S_2 = S \cap V_2$. Si $S_1 = \emptyset$ ou $S_2 = \emptyset$ alors G_S est un sous-graphe de G_1 ou G_2 . Donc $\chi(G_S) = \omega(G_S)$.

On suppose donc que $S_1 \neq \emptyset$ et $S_2 \neq \emptyset$.

- (a) Supposons que $G = G_1 + G_2$. On a $\chi(G_S) = \max\{\chi(G_1_{S_1}), \chi(G_2_{S_2})\}$ et $\omega(G_S) = \max\{\omega(G_1_{S_1}), \omega(G_2_{S_2})\}$.

Or par hypothèse d'induction, G_1 et G_2 sont parfaits. Donc $\chi(G_1_{S_1}) = \omega(G_1_{S_1})$ et $\chi(G_2_{S_2}) = \omega(G_2_{S_2})$.

Donc $\max\{\chi(G_1_{S_1}), \chi(G_2_{S_2})\} = \max\{\omega(G_1_{S_1}), \omega(G_2_{S_2})\}$ et donc $\chi(G_S) = \omega(G_S)$.

- (b) Sinon $G = G_1 \times G_2$. Dans ce cas, $\chi(G_S) \leq \chi(G_1_{S_1}) + \chi(G_2_{S_2})$. Il suffit de colorier G_1 et G_2 de façon optimale, mais avec deux ensembles de couleurs disjoints.

$\omega(G_S) \geq \omega(G_1_{S_1}) + \omega(G_2_{S_2})$ car si C_1 est un ensemble de sommets de G_1 formant une clique et C_2 est un ensemble de sommets de G_2 formant une clique, alors $C_1 \cup C_2$ forme une clique de G .

Donc $\chi(G_S) \leq \chi(G_1_{S_1}) + \chi(G_2_{S_2}) = \omega(G_1_{S_1}) + \omega(G_2_{S_2}) \leq \omega(G_S)$. Donc $\chi(G_S) = \omega(G_S)$.

Conclusion : G est parfait et donc par induction, tout cographe est parfait.

3. Montrer que si G est un cographe, alors tous ses sous-graphes induits sont également des cographes.

L'hypothèse est vraie pour tout cographe ayant au plus 1 sommet. Supposons qu'elle soit vraie pour tout cographe d'ordre au plus $n - 1$ avec $n \geq 2$.

Soit $G = (V, E)$ un cographe à n sommets formé à partir de deux cographes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$.

Comme $|V_1| \leq n - 1$ et $|V_2| \leq n - 1$, tout sous-graphe de G_1 et tout sous-graphe de G_2 est un cographe. Soit $S \subseteq V$ et $S_1 = S \cap V_1$ et $S_2 = S \cap V_2$. Si $S_1 = \emptyset$ ou $S_2 = \emptyset$ alors G_S est un sous-graphe de G_1 ou G_2 . Donc G_S est un cographe.

On suppose donc que $S_1 \neq \emptyset$ et $S_2 \neq \emptyset$.

- (a) Supposons que $G = G_1 + G_2$. Par hypothèse d'induction, G_{1S_1} et G_{2S_2} sont des cographes. Or $G_S = G_{1S_1} + G_{2S_2}$. Donc G_S est un cographe.
- (b) Sinon $G = G_1 \times G_2$. Par hypothèse d'induction, G_{1S_1} et G_{2S_2} sont des cographes. Or $G_S = G_{1S_1} \times G_{2S_2}$. Donc G_S est un cographe.

Conclusion : pour tout $S \subseteq V$, G_S est un cographe et donc par induction, tout sous-graphe induit d'un cographe est un cographe.

4. Montrer que G est un cographe si et seulement si son complémentaire \overline{G} est un cographe.

L'hypothèse est vraie pour tout cographe ayant au plus 1 sommet. Supposons qu'elle soit vraie pour tout cographe d'ordre au plus $n - 1$ avec $n \geq 2$.

Soit $G = (V, E)$ un cographe à n sommets formé à partir de deux cographes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$.

- (a) Supposons que $G = G_1 + G_2$. Alors $\overline{G} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$.
Par hypothèse d'induction, $\overline{G_1}$ et $\overline{G_2}$ sont des cographes. Donc \overline{G} est un cographe.
- (b) Sinon $G = G_1 \times G_2$. Alors $\overline{G} = \overline{G_1} + \overline{G_2}$.
Par hypothèse d'induction, $\overline{G_1}$ et $\overline{G_2}$ sont des cographes. Donc \overline{G} est un cographe.

Conclusion : \overline{G} est un cographe et donc par induction, tout complémentaire d'un cographe est un cographe.

En déduire que l'on peut construire tous les cographes à partir de K_1 en utilisant les opérateurs + et complément. En d'autres termes, que l'on peut utiliser comme schéma d'induction :

- K_1 est un cographe ;
- si $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont des cographes, alors le graphe $G_1 + G_2$ est un cographe ;
- si G est un cographe, alors \overline{G} est un cographe.

D'après la question précédente, tout graphe produit par ce schéma d'induction est un cographe. Inversement, soit G un cographe. Si $n(G) \geq 2$ alors il existe deux cographes G_1 et G_2 tels que $G = G_1 + G_2$ ou $G = G_1 \times G_2$.

Si $G = G_1 + G_2$ alors G sera bien produit par le nouveau schéma.

Sinon $G = G_1 \times G_2 = \overline{\overline{G_1}} + \overline{\overline{G_2}}$. Donc G sera également produit par le nouveau schéma.

Conclusion, tout cographe peut être produit par ce nouveau schéma et donc les deux schémas sont équivalents.

5. Montrer que tout cographe G ne possède pas P_4 comme sous-graphe induit, c'est à dire que si v_1, v_2, v_3, v_4 est une chaîne de G alors G contient au moins une arête parmi $(v_1, v_3), (v_1, v_4)$ ou (v_2, v_4) .

L'hypothèse est vraie pour tout cographe ayant au plus 3 sommets. Supposons qu'elle soit vraie pour tout cographe d'ordre $n - 1$ avec $n \geq 4$.

Soit $G = (V, E)$ un cographe à n sommets formé à partir de deux cographes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$.

- (a) Supposons que $G = G_1 + G_2$. Par hypothèse d'induction, ni G_1 ni G_2 ne possèdent P_4 comme sous-graphe induit. Il en est donc de même pour G .

- (b) Sinon $G = G1 \times G2$. Alors $\overline{G} = \overline{G1} + \overline{G2}$.
 $\overline{G1}$ et $\overline{G2}$ sont des cograves. Donc par hypothèse d'induction ni $\overline{G1}$ ni $\overline{G2}$. ne possèdent P_4 comme sous-grave induit et il en est donc de même pour \overline{G} .
 Or $\overline{P_4} = P_4$. Donc G est également sans P_4 comme sous-grave induit.

Conclusion : G ne possède pas P_4 comme sous-grave induit et donc par induction, c'est vrai pour tout cgrave.

6. Montrer que tout cgrave est un grave de comparabilité.

L'hypothèse est vraie pour tout cgrave ayant au plus 1 sommet. Supposons qu'elle soit vraie pour tout cgrave d'ordre au plus $n - 1$ avec $n \geq 2$.

Soit $G = (V, E)$ un cgrave à n sommets formé à partir de deux cograves $G1 = (V1, E1)$ et $G2 = (V2, E2)$.

Par hypothèse d'induction, $G1$ et $G2$ sont des graves de comparabilité. Soit $(V1, F1)$ et $(V2, F2)$ des orientations transitives respectivement de $G1$ et $G2$.

- (a) Supposons que $G = G1 + G2$. Alors $(V1 \cup V2, F1 \cup F2)$ est une orientation transitive de G . Donc G est un grave de comparabilité.
- (b) Sinon $G = G1 \times G2$. Soit F une orientation des arêtes de G avec $F = F1 \cup F2 \cup \{(v1, v2) | v1 \in V1, v2 \in V2\}$. En d'autres termes, toutes les arêtes entre $V1$ et $V2$ sont orientées de $V1$ vers $V2$.

Soit (u, v) et (v, w) deux arcs consécutifs de G .

Si $u, v, w \in V1$, comme $F1$ est une orientation transitive, l'arc $(u, w) \in F1$.

Idem si $u, v, w \in V2$.

On ne peut pas avoir $u \in V2$ et $w \in V1$ car il n'existe aucun arc entre $V2$ et $V1$.

Les seuls cas restant possibles sont donc $u \in V1, v \in V1$ et $w \in V2$ ou $u \in V1, v \in V2$ et $w \in V2$. Comme tous les arcs possibles entre $V1$ et $V2$ existent, on a bien $(u, w) \in F$.

Donc F est bien une orientation transitive de G et donc G est de comparabilité.

Conclusion : G est un grave de comparabilité et donc par induction, tout cgrave est de comparabilité.