

Optimisation Combinatoire - Partie Graphes - Cours 5

Olivier Baudon

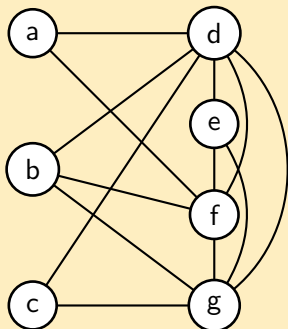
Université de Bordeaux

30 janvier 2023

Graphes scindés (Split graphs)

Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est un **graphe scindé** (en anglais : "split graph") si et seulement si il existe une partition de $V = S \cup K$ telle que S est un stable et K une clique.



Théorèmes

- ▶ G est un graphe scindé $\Leftrightarrow \overline{G}$ est un graphe scindé.
- ▶ Soit G un graphe scindé dont les sommets ont été partitionnés en un stable S et une clique K . Exactement une de ces conditions est vérifiée :
 1. $|S| = \alpha(G)$ et $|K| = \omega(G)$. Dans ce cas, la partition stable/clique est unique.
 2. $|S| = \alpha(G)$ et $|K| = \omega(G) - 1$. Dans ce cas, il existe $x \in S$ tel que $K \cup \{x\}$ est une clique.
 3. $|S| = \alpha(G) - 1$ et $|K| = \omega(G)$. Dans ce cas, il existe $y \in K$ tel que $S \cup \{y\}$ est un stable.

Graphes scindés (Split graphs)

Preuve du deuxième théorème

On a $|S| + |K| = |V|$. On a également $|S| \leq \alpha(G)$ et $|K| \leq \omega(G)$.
Donc $\alpha(G) + \omega(G) \geq |V|$.

Rappel : une clique et un stable ont au plus un sommet en commun.

Soit S' un stable de taille $\alpha(G)$ et K' une clique de taille $\omega(G)$.

Si $S' \cap K' = \emptyset$, alors $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V|$ et donc

$$\alpha(G) + \omega(G) = |V|.$$

Si $S' \cap K' = \{x\}$, alors $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V| + 1$.

$$\text{Donc } |V| \leq \alpha(G) + \omega(G) \leq |V| + 1.$$

Graphes scindés (Split graphs)

Preuve du deuxième théorème - suite

1^{er} cas : $\alpha(G) + \omega(G) = |V|$

$|S| \leq \alpha(G)$ et $|K| \leq \omega(G)$.

$|S| + |K| = |V|$, donc $|S| = |V| - |K|$, donc $|S| \geq |V| - \omega(G)$.

Donc $|S| \geq \alpha(G) + \omega(G) - \omega(G)$, donc $|S| \geq \alpha(G)$.

Donc $|S| = \alpha(G)$. De même on montre que $|K| = \omega(G)$.

Unicité de la partition :

Supposons qu'il existe une autre partition $S' \cup K'$.

Soit $\{x\} = S \cap K'$ et $\{y\} = S' \cap K$.

Si $xy \in E(G)$, alors $\{x\} \cup K$ est une clique. Or sa taille est égale à $\omega(G) + 1 \rightarrow$ Impossible.

De même, si $xy \notin E(G)$, alors $\{y\} \cup S$ est un stable. Or sa taille est égale à $\alpha(G) + 1 \rightarrow$ Impossible.

Donc la partition est unique.

Graphes scindés (Split graphs)

Preuve du deuxième théorème - suite

2^e cas : $\alpha(G) + \omega(G) = |V| + 1$

Si $|S| < \alpha(G)$ alors $|K| = |V| - |S| > |V| - \alpha(G)$.

$|K| > \alpha(G) + \omega(G) - 1 - \alpha(G)$

$|K| > \omega(G) - 1$. Donc $|K| = \omega(G)$ Donc

$|S| = |V| - |K| = \alpha(G) + \omega(G) - 1 - \omega(G)$

Donc $|S| = \alpha(G) - 1$. Soit S' un stable de taille $\alpha(G)$.

$S' \cap K = \{y\}$ et tous les autres éléments de S' sont dans S .

Donc $S \cup \{y\}$ est un stable.

Même raisonnement si $|K| = \omega(G) - 1$ et $|S| = \alpha(G)$.

Graphes scindés (Split graphs)

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. G est un graphe scindé.
2. G et \overline{G} sont des graphes triangulés.
3. G ne contient pas de sous-graphe induit isomorphe à $2K_2$, C_4 ou C_5

Remarque : $2K_2 = \overline{C_4}$ et $\overline{C_5} = C_5$

Graphes scindés (Split graphs)

Preuve du théorème

1) \Rightarrow 2)

Soit $G = (V, E)$ un graphe scindé.

Soit C un cycle de G . Si C est de longueur > 3 , alors il possède au moins deux sommets non consécutifs dans K . Donc C possède une corde. Donc G est triangulé. Comme \overline{G} est aussi un graphe scindé, il en est de même pour \overline{G} .

2) \Rightarrow 3)

Comme G est triangulé, il ne peut contenir de sous-graphe isomorphe à C_4 ou C_5 . Comme il en est de même pour \overline{G} , G ne peut contenir de $2K_2$.

Graphes scindés (Split graphs)

Preuve du théorème - suite

3) \Rightarrow 1)

Soit K une clique maximum de $G = (V, E)$ telle que $S = V \setminus K$ contienne un minimum d'arêtes. On va montrer que S est un stable.

Supposons qu'il existe deux sommets x et y dans S tels que $xy \in E$.

Si l'un des deux sommets x ou y est voisin de tous les sommets de K , alors K n'est pas maximum.

S'il existe un sommet z dans K tel que ni x , ni y ne soient adjacents à z , et que x et y soient voisins de tous les autres sommets de K , alors $K \cup \{x, y\} \setminus \{z\}$ est une clique de taille strictement plus grande que K , ce qui est impossible.

Donc il existe deux sommets distincts u et v dans K tels que $xu \notin E$ et $yv \notin E$.

Graphes scindés (Split graphs)

Preuve du théorème - suite

Comme G est sans $2K_2$, alors soit $xv \in E$, soit $yu \in E$. On ne peut avoir les deux car sinon x, v, u, y forme un C_4 . On suppose donc que $yu \in E$ et $xv \notin E$

Pour tout sommet w de $K \setminus \{u, v\}$, on a :

1. si $xw \notin E$ et $yw \notin E$, alors G possède un $2K_2$ formé par $\{x, y, v, w\}$, ce qui est impossible ;
2. si $xw \in E$ et $yw \notin E$, alors x, w, u, y forme un C_4 , ce qui est impossible ;

Donc si $yu \in E$ et $xv \notin E$, alors y est adjacent à tous les sommets de $K \setminus \{v\}$. Donc $K' = K \cup \{y\} \setminus \{v\}$ est une clique de même taille que K .

Graphes scindés (Split graphs)

Preuve du théorème - suite et fin

Comme $G_{V \setminus K'}$ n'a pas moins d'arête que $G_{V \setminus K}$, et que x est adjacent à y , mais pas à v , il existe $t \neq y$ dans $V \setminus K$ tel que t est adjacent à v , mais pas à y .

$tx \in E$, sinon $\{t, x, y, v\}$ forme un $2K_2$.

$tu \notin E$, sinon $\{t, x, y, u\}$ forme un C_4 .

Mais on a alors $\{t, x, y, u, v\}$ qui forme un C_5 .

Donc $G_{V \setminus K}$ est un stable et donc G est un graphe scindé.

Corollaire

Les graphes scindés sont parfaits.