

# Optimisation Combinatoire - Partie Graphes - Cours 5

Olivier Baudon

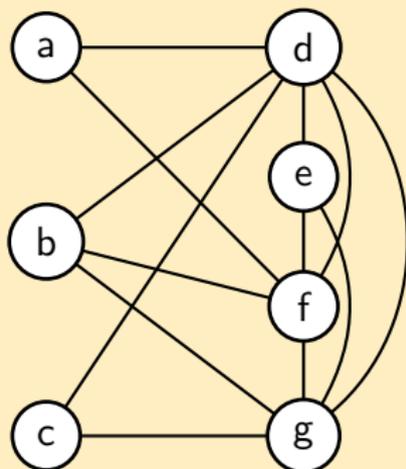
Université de Bordeaux

30 janvier 2023

# Graphes scindés (Split graphs)

## Définition

Un graphe  $G = (V, E)$  est un **graphe scindé** (en anglais : "split graph") si et seulement si il existe une partition de  $V = S \cup K$  telle que  $S$  est un stable et  $K$  une clique.



## Théorèmes

- ▶  $G$  est un graphe scindé  $\Leftrightarrow \overline{G}$  est un graphe scindé.
- ▶ Soit  $G$  un graphe scindé dont les sommets ont été partitionnés en un stable  $S$  et une clique  $K$ . Exactement une de ces conditions est vérifiée :
  1.  $|S| = \alpha(G)$  et  $|K| = \omega(G)$ . Dans ce cas, la partition stable/clique est unique.
  2.  $|S| = \alpha(G)$  et  $|K| = \omega(G) - 1$ . Dans ce cas, il existe  $x \in S$  tel que  $K \cup \{x\}$  est une clique.
  3.  $|S| = \alpha(G) - 1$  et  $|K| = \omega(G)$ . Dans ce cas, il existe  $y \in K$  tel que  $S \cup \{y\}$  est un stable.

# Graphes scindés (Split graphs)

## Preuve du deuxième théorème

On a  $|S| + |K| = |V|$ . On a également  $|S| \leq \alpha(G)$  et  $|K| \leq \omega(G)$ .  
Donc  $\alpha(G) + \omega(G) \geq |V|$ .

Rappel : une clique et un stable ont au plus un sommet en commun.

Soit  $S'$  un stable de taille  $\alpha(G)$  et  $K'$  une clique de taille  $\omega(G)$ .

Si  $S' \cap K' = \emptyset$ , alors  $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V|$  et donc  
 $\alpha(G) + \omega(G) = |V|$ .

Si  $S' \cap K' = \{x\}$ , alors  $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V| + 1$ .

Donc  $|V| \leq \alpha(G) + \omega(G) \leq |V| + 1$ .

# Graphes scindés (Split graphs)

## Preuve du deuxième théorème - suite

1<sup>er</sup> cas :  $\alpha(G) + \omega(G) = |V|$

$|S| \leq \alpha(G)$  et  $|K| \leq \omega(G)$ .

$|S| + |K| = |V|$ , donc  $|S| = |V| - |K|$ , donc  $|S| \geq |V| - \omega(G)$ .

Donc  $|S| \geq \alpha(G) + \omega(G) - \omega(G)$ , donc  $|S| \geq \alpha(G)$ .

Donc  $|S| = \alpha(G)$ . De même on montre que  $|K| = \omega(G)$ .

### Unicité de la partition :

Supposons qu'il existe une autre partition  $S' \cup K'$ .

Soit  $\{x\} = S \cap K'$  et  $\{y\} = S' \cap K$ .

Si  $xy \in E(G)$ , alors  $\{x\} \cup K$  est une clique. Or sa taille est égale à  $\omega(G) + 1 \rightarrow$  Impossible.

De même, si  $xy \notin E(G)$ , alors  $\{y\} \cup S$  est un stable. Or sa taille est égale à  $\alpha(G) + 1 \rightarrow$  Impossible.

Donc la partition est unique.

# Graphes scindés (Split graphs)

## Preuve du deuxième théorème - suite

2<sup>e</sup> cas :  $\alpha(G) + \omega(G) = |V| + 1$

Si  $|S| < \alpha(G)$  alors  $|K| = |V| - |S| > |V| - \alpha(G)$ .

$|K| > \alpha(G) + \omega(G) - 1 - \alpha(G)$

$|K| > \omega(G) - 1$ . Donc  $|K| = \omega(G)$  Donc

$|S| = |V| - |K| = \alpha(G) + \omega(G) - 1 - \omega(G)$

Donc  $|S| = \alpha(G) - 1$ . Soit  $S'$  un stable de taille  $\alpha(G)$ .

$S' \cap K = \{y\}$  et tous les autres éléments de  $S'$  sont dans  $S$ .

Donc  $S \cup \{y\}$  est un stable.

Même raisonnement si  $|K| = \omega(G) - 1$  et  $|S| = \alpha(G)$ .

# Graphes scindés (Split graphs)

## Théorème

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $G$  est un graphe scindé.
2.  $G$  et  $\overline{G}$  sont des graphes triangulés.
3.  $G$  ne contient pas de sous-graphe induit isomorphe à  $2K_2$ ,  $C_4$  ou  $C_5$

Remarque :  $2K_2 = \overline{C_4}$  et  $\overline{C_5} = C_5$

# Graphes scindés (Split graphs)

## Preuve du théorème

1)  $\Rightarrow$  2)

Soit  $G = (V, E)$  un graphe scindé.

Soit  $C$  un cycle de  $G$ . Si  $C$  est de longueur  $> 3$ , alors il possède au moins deux sommets non consécutifs dans  $K$ . Donc  $C$  possède une corde. Donc  $G$  est triangulé. Comme  $\overline{G}$  est aussi un graphe scindé, il en est de même pour  $\overline{G}$ .

2)  $\Rightarrow$  3)

Comme  $G$  est triangulé, il ne peut contenir de sous-graphe isomorphe à  $C_4$  ou  $C_5$ . Comme il en est de même pour  $\overline{G}$ ,  $G$  ne peut contenir de  $2K_2$ .

# Graphes scindés (Split graphs)

## Preuve du théorème - suite

3)  $\Rightarrow$  1)

Soit  $K$  une clique maximum de  $G = (V, E)$  telle que  $S = V \setminus K$  contienne un minimum d'arêtes. On va montrer que  $S$  est un stable.

Supposons qu'il existe deux sommets  $x$  et  $y$  dans  $S$  tels que  $xy \in E$ .

Si l'un des deux sommets  $x$  ou  $y$  est voisin de tous les sommets de  $K$ , alors  $K$  n'est pas maximum.

S'il existe un sommet  $z$  dans  $K$  tel que ni  $x$ , ni  $y$  ne soient adjacents à  $z$ , et que  $x$  et  $y$  soient voisins de tous les autres sommets de  $K$ , alors  $K \cup \{x, y\} \setminus \{z\}$  est une clique de taille strictement plus grande que  $K$ , ce qui est impossible.

Donc il existe deux sommets distincts  $u$  et  $v$  dans  $K$  tels que  $xu \notin E$  et  $yv \notin E$ .

# Graphes scindés (Split graphs)

## Preuve du théorème - suite

Comme  $G$  est sans  $2K_2$ , alors soit  $xv \in E$ , soit  $yu \in E$ . On ne peut avoir les deux car sinon  $x, v, u, y$  forme un  $C_4$ . On suppose donc que  $yu \in E$  et  $xv \notin E$

Pour tout sommet  $w$  de  $K \setminus \{u, v\}$ , on a :

1. si  $xw \notin E$  et  $yw \notin E$ , alors  $G$  possède un  $2K_2$  formé par  $\{x, y, v, w\}$ , ce qui est impossible ;
2. si  $xw \in E$  et  $yw \notin E$ , alors  $x, w, u, y$  forme un  $C_4$ , ce qui est impossible ;

Donc si  $yu \in E$  et  $xv \notin E$ , alors  $y$  est adjacent à tous les sommets de  $K \setminus \{v\}$ . Donc  $K' = K \cup \{y\} \setminus \{v\}$  est une clique de même taille que  $K$ .

# Graphes scindés (Split graphs)

## Preuve du théorème - suite et fin

Comme  $G_{V \setminus K'}$  n'a pas moins d'arête que  $G_{V \setminus K}$ , et que  $x$  est adjacent à  $y$ , mais pas à  $v$ , il existe  $t \neq y$  dans  $V \setminus K$  tel que  $t$  est adjacent à  $v$ , mais pas à  $y$ .

$tx \in E$ , sinon  $\{t, x, y, v\}$  forme un  $2K_2$ .

$tu \notin E$ , sinon  $\{t, x, y, u\}$  forme un  $C_4$ .

Mais on a alors  $\{t, x, y, u, v\}$  qui forme un  $C_5$ .

Donc  $G_{V \setminus K}$  est un stable et donc  $G$  est un graphe scindé.

## Corollaire

Les graphes scindés sont parfaits.