

Optimisation Combinatoire - Partie Graphes - Cours 4

Olivier Baudon

Université de Bordeaux

1 février 2021

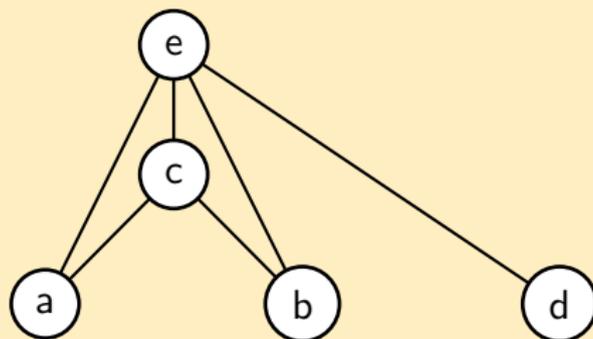
Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est un **graphe d'intervalles** si et seulement si il existe une bijection ϕ entre V et un ensemble I d'intervalles sur un ensemble totalement ordonné T (par exemple $T = \mathbb{R}$) telle que $xy \in E \Leftrightarrow \phi(x) \cap \phi(y) \neq \emptyset$

Graphes d'intervalles

Exemple

Par exemple, si on prend les intervalles $I_a = [1..2]$, $I_b = [3..5]$, $I_c = [1..5]$, $I_d = [9..10]$, $I_e = [1..10]$, on obtient le graphe suivant, où chaque sommet x représente l'intervalle I_x :



Exemple de graphe d'intervalle

Exemple d'application

Soit un ensemble $\{C_i, 1 \leq i \leq n\}$ de cours. On note par T_i l'intervalle de temps où le cours C_i a lieu.

Il faut affecter des salles de cours de façon à ce que deux cours qui ont lieu en même temps ne soient pas dans la même salle. Trouvez le nombre minimum de salles nécessaires revient à chercher le nombre chromatique $\chi(G)$ du graphe d'intervalles G lié aux intervalles $T_i, 1 \leq i \leq n$.

Propositions

Proposition 1 : un sous-graphe induit d'un graphe d'intervalles est un graphe d'intervalles.

Preuve : soit $G = (V, E)$ un graphe d'intervalles et $\{I_v, v \in V\}$ une famille d'intervalles représentée par G . Soit $S \subseteq V$. G_S représentera la famille d'intervalles $\{I_v, v \in S\}$.

Proposition 2 : tout graphe d'intervalles est triangulé.

Preuve : soit $G = (V, E)$ un graphe d'intervalles et $\{I_v, v \in V\}$ une famille d'intervalles représentée par G . Supposons que G admette un cycle $v_0, v_1, \dots, v_k, v_0$, avec $k > 3$ sans corde.

Pour $i = 1$ à k , on prend $p_i \in I_{i-1} \cap I_i$. La suite $(p_i)_{0 \leq i \leq k}$ est strictement croissante ou strictement décroissante. Donc

$I_0 \cap I_k = \emptyset$, ce qui est contradictoire car il existe une arête entre v_0 et v_k .

Définitions

On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ non orienté admet une **orientation transitive** si et seulement si G admet une orientation $\vec{G} = (V, A)$ telle que :

$\forall x, y, z \in V, xy \in A \text{ et } yz \in A \Rightarrow xz \in A.$

Un graphe qui admet une orientation transitive sera appelé un **graphe de comparabilité**.

Exemples

Par exemple, pour tout n , K_n est de comparabilité. Il suffit d'ordonner tous les sommets et d'orienter les arêtes systématiquement de la plus petite extrémité vers la plus grande. Par contre, le cycle C_5 n'est pas de comparabilité.

Preuve : soit v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 les sommets de C_5 . Si on oriente $v_1 v_2$ de v_1 vers v_2 , alors on doit choisir les orientations suivantes :

- ▶ $v_3 v_2$ (car sinon il faudrait un arc de v_1 vers v_3 , or il n'y a pas d'arête entre v_1 et v_3 ;
- ▶ $v_3 v_4$ sinon il faudrait un arc de v_4 vers v_2 ;
- ▶ $v_5 v_4$ sinon il faudrait un arc de v_3 vers v_5 ;

On ne peut pas orienter l'arête entre v_5 et v_1 car $v_5 v_1$ obligerait à avoir un arc $v_5 v_2$ et $v_1 v_5$ obligerait à avoir un arc $v_1 v_4$.

Propositions

Proposition 3 : Le graphe complémentaire d'un graphe d'intervalles admet une orientation transitive.

Preuve : soit $G = (V, E)$ un graphe d'intervalles et $\{I_v, v \in V\}$ une famille d'intervalles représentée par G . On définit une orientation dans $\bar{G} = (V, \bar{E})$ par : $xy \in \bar{E} \Leftrightarrow I_x < I_y$ (I_x est à gauche de I_y).

Cette orientation est bien transitive car

$$xy \in \bar{E} \text{ et } yz \in \bar{E} \Leftrightarrow I_x < I_y \text{ et } I_y < I_z \Rightarrow I_x < I_z$$

Donc $xz \in \bar{E}$.

Théorème (Gilmore et Hoffman - 1964)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. G est un graphe d'intervalles ;
2. G est triangulé et son complémentaire est un graphe de comparabilité ;
3. les cliques maximales de G peuvent être ordonnées de façon à ce que pour tout $x \in V$, les cliques contenant x soient consécutives.

Preuve du théorème de Gilmore et Hoffman

1) \Rightarrow 2) : vrai par les propositions 2 et 3.

Lemme : Soit G un graphe triangulé et tel que \overline{G} admette une orientation transitive (V, A) . Soit C_1 et C_2 deux cliques maximales de G . Alors :

1. il existe un arc de A qui relie un sommet de C_1 et un sommet de C_2 ;
2. tous les arcs entre les sommets de C_1 et C_2 dans A ont la même direction (tous vont de C_1 vers C_2 ou tous vont C_2 vers C_1).

Preuve du Lemme

S'il n'existe pas d'arc entre un sommet de C_1 et un sommet de C_2 dans A , alors $C_1 \cup C_2$ est une clique, ce qui est contradictoire avec le fait que C_1 et C_2 soient des cliques maximales.

Supposons qu'il existe des arcs de directions opposées entre C_1 et C_2 dans A . Soit ab et dc ces deux arcs, avec $a, c \in C_1$ et $b, d \in C_2$.

Donc $ac, bd \in E$.

Peut-on avoir $a = c$ ou $b = d$? La réponse est non car si $a = c$, alors comme $ab, da \in A$, on doit avoir $db \in A$. Or $bd \in E$. Donc c'est impossible et donc $a \neq c$. Par symétrie, on obtient de même que $b \neq d$. G est triangulé, donc $ad \in A$ ou $cb \in A$, sinon a, c, b, d est un C_4 sans corde de G .

Supposons que $ad \in \overline{E}$. Si on oriente dans A l'arc entre a et d dans le sens ad , alors $ac \in A$, ce qui est impossible car $ac \in E$. De même si on l'oriente dans le sens da , alors $db \in A$, ce qui est également impossible. Par symétrie, on a également $bc \in \overline{E}$ impossible. Donc on aboutit à une contradiction et donc les deux arcs entre C_1 et C_2 doivent avoir la même direction, ainsi que tous les autres arcs entre C_1 et C_2 .

Suite de la preuve du Théorème

2) \Rightarrow 3) : soit C l'ensemble des cliques maximales de G et $\mathcal{C} = (C, A')$ le graphe orienté dont les sommets sont les cliques maximales de G et $C_i C_j \in A'$ si les arcs entre C_i et C_j dans A vont de C_i vers C_j .

\mathcal{C} est un tournoi car il existe un arc entre toute paire de cliques de C . Montrons que c'est un tournoi transitif.

Soit les cliques maximales C_i, C_j et C_k telles que $C_i C_j$ et $C_j C_k \in A'$. Soit $w \in C_i, x, y \in C_j, z \in C_k$. tels que $wx, yz \in A$. Supposons que $xz \in \bar{E}$. Alors la seule possibilité d'orientation est que $xz \in A$. Comme $wx \in A$, on a alors $wz \in A$ et donc $C_i C_k \in A'$. De même si $wy \in \bar{E}$.

Si $xz, wy \in E$, comme $xy \in E$ et G sans C_4 alors $wz \in \bar{E}$. Et la seule orientation possible est $wz \in A$, sinon on devrait avoir $yw \in A$, or $yw \notin \bar{E}$.

Donc l'orientation de \mathcal{C} est bien transitive.

Suite de la preuve du Théorème

Comme \mathcal{C} admet une orientation transitive, il admet un tri topologique. Il reste à montrer que si un sommet x est présent dans plusieurs cliques, celles-ci sont consécutives. Supposons que $x \in C_i, x \in C_k, x \notin C_j$ avec $C_i < C_j < C_k$.

Comme $x \notin C_j$, il existe $y \in C_j$ tel que $xy \notin E$, donc $xy \in \bar{E}$.

Comme $C_i < C_j$, $xy \in A'$ et comme $C_j < C_k$, $yx \in A'$. On a donc une contradiction et donc $x \in C_j$.

3) \Rightarrow 1) : les cliques maximales sont ordonnées $C_1 < C_2 \dots < C_l$.

A tout sommet $x \in V$, on associe I_x l'ensemble des indices des cliques qui contiennent x . I_x est bien un intervalle de (\mathcal{C}, \leq) . De plus, si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, alors x et y appartiennent à une même clique maximale et donc $xy \in E$.

Remarque : pour G un graphe d'intervalle, calculer $\chi(G), \alpha(G), \omega(G), k(G)$ sont des problèmes polynomiaux.

Définition

Une matrice en $\{0, 1\}$ a la **propriété des 1-consécutifs pour les colonnes** si on peut permuter ses lignes pour n'avoir que des 1 consécutifs dans ses colonnes.

Théorème - Fulkerson 1965

Un graphe $G = (V, E)$ non orienté est un graphe d'intervalles si et seulement si sa matrice des cliques maximales \mathbb{M} a la propriété des 1-consécutifs pour les colonnes.

Preuve :

\Rightarrow : il suffit de considérer l'ordre sur les cliques maximales obtenu au théorème précédent.

\Leftarrow : comme \mathbb{M} a la propriété des 1-consécutifs, on prend comme intervalle I_x associé au sommet x les indices de chaque ligne dans laquelle la valeur associée à la colonne de x est 1. Donc le graphe G associé à \mathbb{M} est bien un graphe d'intervalle.

Théorème - Lekkerkerker et Boland 1962

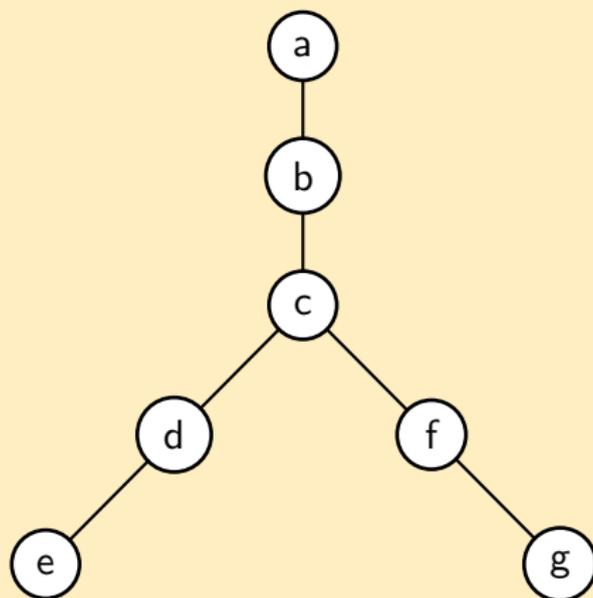
Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un graphe d'intervalles si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. G est un graphe triangulé ;
2. tout ensemble de 3 sommets peut être ordonné de telle façon que toute chaîne du premier au troisième passe par un voisin du second.

Graphe d'intervalles

Corollaire

Un graphe d'intervalle ne contient pas le **triplet astéroïde** comme sous-graphe induit.



Triplet astéroïde