

Optimisation Combinatoire - Partie Graphes - Cours 2

Olivier Baudon

Université de Bordeaux

22 janvier 2024

Rappels de définitions et notations

Soit un graphe $G = (V, E)$

- ▶ $\alpha(G)$ désigne la taille du plus grand stable de G
- ▶ $\omega(G)$ désigne la taille de la plus grande clique de G

Par exemple, $\alpha(C_6) = 3$ et $\omega(C_6) = 2$.

- ▶ $\overline{G} = (V, \overline{E})$ désigne le complémentaire de G , c'est à dire le graphe tel que $\forall x, y \in V, xy \in \overline{E} \Leftrightarrow xy \notin E$.

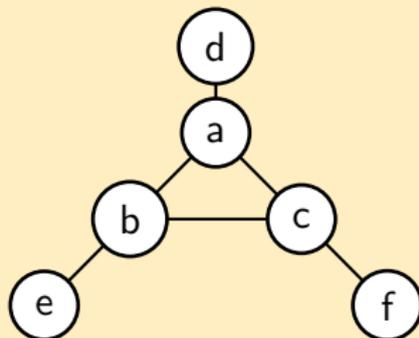
Remarque : $\overline{\overline{G}} = G$

Couverture de cliques

Une couverture de cliques de taille k est une partition de V en $V = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k$ telle que chaque sous graphe induit G_{A_i} soit une clique.

On notera par $k(G)$ le plus petit k tel que G admette une couverture de cliques de taille k .

Exemple : dans le graphe G ci-dessous, $k(G) = 3$ en prenant $A_1 = \{a, d\}$, $A_2 = \{b, e\}$, $A_3 = \{c, f\}$. On peut remarquer que $k(G) \geq 3$ car $\alpha(G) \geq 3$ en considérant le stable $\{d, e, f\}$



Propositions

- ▶ $k(G) \geq \alpha(G)$
- ▶ $\chi(G) \geq \omega(G)$
- ▶ $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$
- ▶ $\chi(G) = k(\overline{G})$

Définition (Claude Berge - 1961)

Un graphe $G = (V, E)$ est parfait si et seulement si, pour tout $S \subseteq V$, $\chi(G_S) = \omega(G_S)$.

Remarque : La propriété "est parfait" est par définition **héréditaire**.
Exemples de graphes parfaits : les graphes complets, les stables, les cycles de longueur paire, les graphes bipartis.

Preuves :

- ▶ Tout sous-graphe d'un graphe complet est complet. Et pour tout entier n , $\chi(K_n) = \omega(K_n) = n$.
- ▶ Tout sous-graphe d'un graphe biparti est biparti. Soit $G = (A \cup B, E)$, un graphe biparti. Si G ne contient aucune arête, alors $\chi(G) = \omega(G) = 1$. Sinon $\chi(G) = \omega(G) = 2$.

Les cycles impairs $\neq C_3$ sont imparfaits. En effet, soit C_{2n+1} , $n \geq 2$ un cycle impair. $\chi(C_{2n+1}) = 3 \neq \omega(C_{2n+1}) = 2$.

Propriété

Soit la propriété :

$$(P2) : \forall S \subseteq V(G), k(G_S) = \alpha(G_S).$$

G est parfait si et seulement si \overline{G} satisfait (P2).

Théorème : conjecture faible des graphes parfaits (Berge - 1962), prouvée par Lovász en 1971

G est parfait $\Leftrightarrow \overline{G}$ est parfait.

Théorème - Lovász

Soit G un graphe parfait et x un sommet de G . Soit H le graphe obtenu en remplaçant x par une clique C et en reliant tous les sommets de la clique aux voisins de x .

Alors H est parfait.

Preuve

Remarque : il suffit de prouver le théorème avec $C = K_2$.

Preuve par récurrence sur le nombre de sommets de G .

Si $n(G) = 1$, alors $H = K_2$ qui est parfait.

Preuve - suite

Supposons que la propriété soit vraie pour tout graphe parfait ayant au plus $n - 1$ sommets. Soit G un graphe parfait à n sommets et H le graphe obtenu à partir de G .

Si H_S est un sous-graphe strict de H ($S \subsetneq V(H)$),

- ▶ si $S \supseteq C$, alors H_S a été obtenu en appliquant la transformation sur x dans un sous-graphe strict G' de G . Or G' est parfait et $n(G') \leq n - 1$. Donc par hypothèse d'induction, H_S est parfait.
- ▶ si $S \not\supseteq C$, alors H_S est un sous-graphe de G et donc H_S est parfait.

Preuve - suite

Il reste donc à montrer que $\omega(H) = \chi(H)$.

On a : $\omega(G) \leq \omega(H) \leq \omega(G) + 1$.

Cas (1) : supposons que $\omega(H) = \omega(G) + 1$.

On a $\chi(H) \leq \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(H)$.

Or $\chi(H) \geq \omega(H)$. Donc $\omega(H) = \chi(H)$.

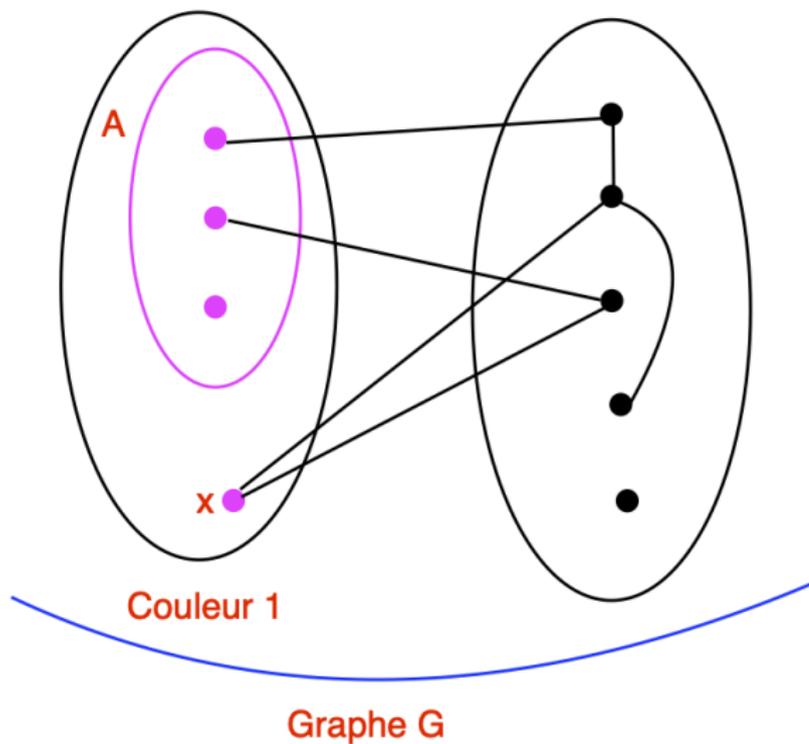
Cas (2) : on suppose que $\omega(H) = \omega(G)$.

Alors x n'est pas dans une clique de G de taille $\omega(G)$.

On colorie G avec $\omega(G)$ couleurs, en affectant la couleur 1 à x .

Soit A l'ensemble des sommets de G coloriés 1 différents de x .

Graphes parfaits



Preuve - suite

$\omega(G \setminus A \cup \{x\}) = \chi(G \setminus A \cup \{x\})$ car G est parfait et donc $G \setminus A \cup \{x\}$ est parfait.

$\chi(G \setminus A \cup \{x\}) = \chi(G) - 1$ car on enlève entièrement une couleur au graphe G (la couleur 1).

Donc $\omega(G \setminus A \cup \{x\}) = \omega(G) - 1$.

x n'appartient pas à une clique de taille $\omega(G)$. Donc

$\omega(G \setminus A) = \omega(G) - 1$. On colorie $G \setminus A$ avec $\omega(G) - 1$ couleurs.

Soit c cette coloration.

Dans H , on colorie les sommets de $G \setminus A \cup \{x\}$ avec la coloration c et x_1 avec $c(x)$. On colorie x_2 et A avec une même couleur supplémentaire ($A \cup \{x_2\}$ est un stable). On a donc une coloration de H avec $\omega(G) = \omega(H)$ couleurs. Donc $\chi(H) = \omega(H)$ et donc H est parfait.

Approche polyédrale

Soit A une matrice $m \times n$ composée de 0 et de 1.

$P(A) = \{x, Ax \leq \mathbf{1}\}$ avec $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$.

$P_I(A)$ = enveloppe convexe($\{x \in P(A)\}$, x est à coordonnées entières).

$P_I(A) \subseteq P(A)$.

Si A ne contient pas de colonne nulle, alors le polyèdre est borné et les valeurs de x seront des vecteurs en $\{0, 1\}$.

Soit G un graphe dont A est la matrice cliques-sommets de G .

Chaque ligne correspond à une clique maximale de G et

$A_{i,j} = 1 \Leftrightarrow x_j \in C_i$ où x_j est le $j^{\text{ème}}$ sommet de G et C_i sa $i^{\text{ème}}$ clique maximale.

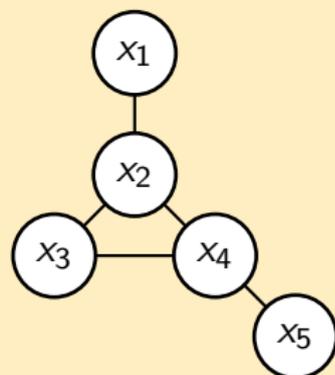
On dit également que G est le graphe dérivé de A .

Approche polyédrale

Exemple :

$$\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice cliques-sommets



Graphe G dérivé

Approche polyédrale

Soit $G = (V, E)$ un graphe et A une matrice cliques-sommets en $\{0, 1\}$ n'ayant pas de colonne nulle dont G est le graphe dérivé. Alors x est un vecteur de $P_I(A)$ si et seulement si x est le vecteur caractéristique d'un stable de G .

Preuve : Si S est un stable et C une clique, alors au plus un sommet peut appartenir à $S \cap C$. Donc si x est le vecteur caractéristique d'un stable S , le produit d'une ligne de A correspondant à une clique C et de x donnera 1 si $|S \cap C| = 1$, 0 sinon.

Inversement, si x est le vecteur représentatif d'un sous-ensemble S de $V(G)$, si $Ax \leq \mathbb{1}$, cela signifie qu'au plus un sommet de S appartient à chaque C_j . Donc il n'y a aucune arête entre les sommets de S et donc S est un stable.

Théorème (Chvátal, 1975) : Soit A une matrice cliques-sommets d'un graphe G . Alors G est parfait $\Leftrightarrow P_I(A) = P(A)$