

Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS aux graphes des Figures 1, 2 et 3 à partir du sommet a .

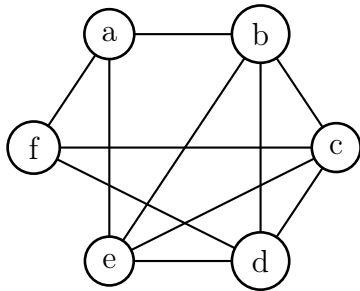


FIGURE 1 – $G1$

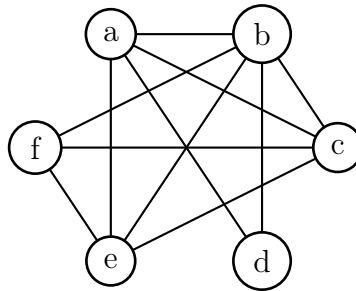


FIGURE 2 – $G2$

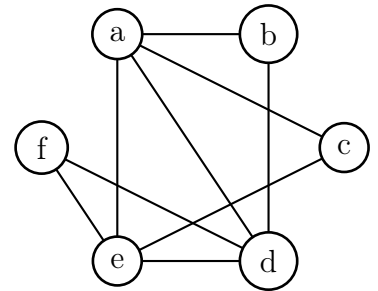


FIGURE 3 – $G3$

Exécution de LexBFS sur $G1$. L'ordre obtenu est d, c, f, e, b, a .

sommet choisi	a	b	c	d	e	f
a	X	6			6	6
b		X	5	5	65	
e			54	54	X	
f			543	543		X
c			X	5432		
d				X		

Exécution de LexBFS sur $G2$. L'ordre obtenu est f, d, e, c, b, a .

sommet choisi	a	b	c	d	e	f
a	X	6	6	6	6	
b		X	65	65	65	5
c			X		654	54
e					X	543
d				X		
f						X

Exécution de LexBFS sur $G3$. L'ordre obtenu est f, c, e, d, b, a .

sommet choisi	a	b	c	d	e	f
a	X	6	6	6	6	
b		X		65		
d				X	64	4
e			63		X	43
c			X			
f						X

2. Parmi les graphes $G1$, $G2$ et $G3$, lesquels sont triangulés ? Justifier votre réponse et en cas de réponse négative, donner les sommets formant un cycle sans corde de longueur > 3 .

Un graphe G est triangulé si et seulement si l'ordre retourné par LexBFS est un ordre d'élimination simplicial.

Pour $G1$, l'ordre obtenu par LexBFS est d, c, f, e, b, a . Le voisinage de d n'est pas une clique : e et f ne sont pas voisins. Donc $G1$ n'est pas triangulé. Par exemple, le sous-graphe induit par $\{a, d, e, f\}$ est un cycle de longueur 4 sans corde.

Pour $G2$, l'ordre obtenu par LexBFS est f, d, e, c, b, a . Lorsque l'on élimine les sommets dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $f : b, c, e \rightarrow K_3$
- $d : a, b \rightarrow K_2$
- $e : a, b, c \rightarrow K_3$
- $c : a, b \rightarrow K_2$
- $b : a \rightarrow K_1$
- $a : \emptyset$

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe $G2$ est triangulé.

Pour $G3$, l'ordre obtenu par LexBFS est f, c, e, d, b, a . Lorsque l'on élimine les sommets dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $f : d, e \rightarrow K_2$
- $c : a, e \rightarrow K_2$
- $e : a, d \rightarrow K_2$
- $d : a, b \rightarrow K_2$
- $b : a \rightarrow K_1$
- $a : \emptyset$

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe $G3$ est triangulé.

3. Parmi les graphes $G1$, $G2$ et $G3$, lesquels sont des graphes d'intervalles ? Justifier votre réponse et donner les intervalles en cas de réponse positive.

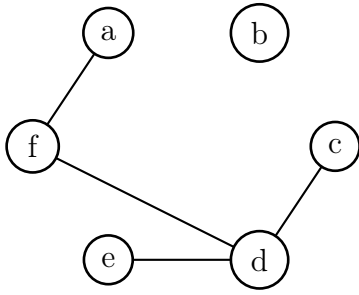


FIGURE 4 – $\overline{G2}$

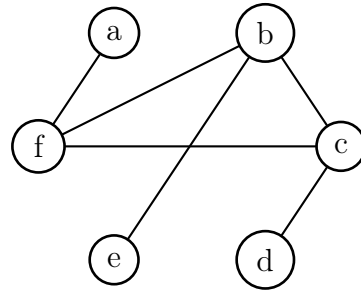


FIGURE 5 – $\overline{G3}$

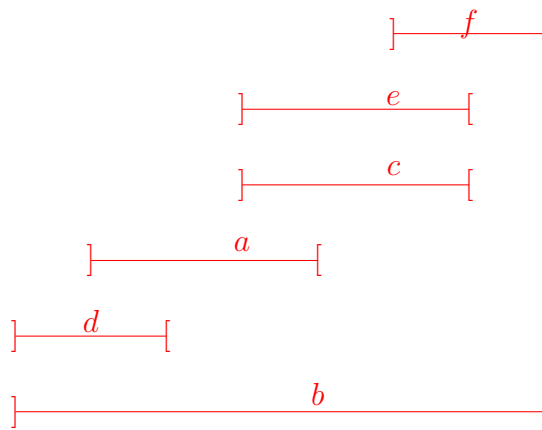


FIGURE 6 – Intervalles du graphe $G2$

Le graphe $G1$ n'est pas triangulé, donc n'est pas d'intervalles.

Le complémentaire du graphe $G2$ est donné par la Figure 4. $\overline{G2}$ admet une orientation transitive, par exemple af, df, de, dc . Les intervalles correspondants sont donnée par la Figure 6.

Le complémentaire du graphe $G3$ est donné par la Figure 5. Le graphe $G3$ n'est pas d'intervalles car son complémentaire $\overline{G3}$ n'admet d'orientation transitive. En effet, si on oriente (sans perte de généralité) l'arête entre a et f de a vers f , on obtient les orientations suivantes :

$$af \Rightarrow bf, cf$$

$$bf \Rightarrow be$$

$$be \Rightarrow bc$$

On ne peut plus orienter l'arête entre c et d car $bc \Rightarrow dc$ et $cf \Rightarrow cd$