

## Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS aux graphes des Figures 1, 2 et 3 à partir du sommet  $a$ .

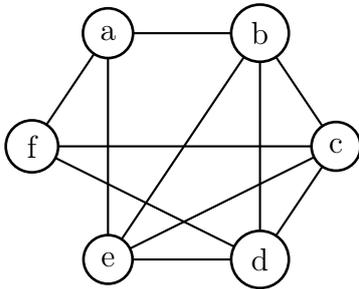


FIGURE 1 –  $G_1$

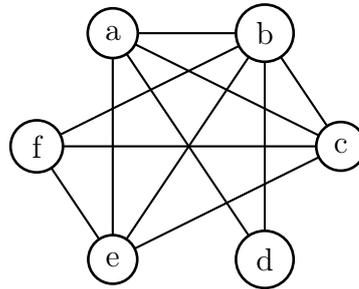


FIGURE 2 –  $G_2$

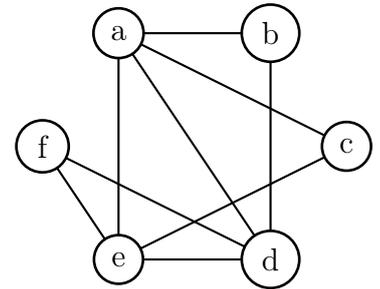


FIGURE 3 –  $G_3$

Exécution de LexBFS sur  $G_1$ . L'ordre obtenu est  $d, c, f, e, b, a$ .

sommet choisi	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	X	6			6	6
$b$		X	5	5	65	
$e$			54	54	X	
$f$			543	543		X
$c$			X	5432		
$d$				X		

Exécution de LexBFS sur  $G_2$ . L'ordre obtenu est  $f, d, e, c, b, a$ .

sommet choisi	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	X	6	6	6	6	
$b$		X	65	65	65	5
$c$			X		654	54
$e$					X	543
$d$				X		
$f$						X

Exécution de LexBFS sur  $G_3$ . L'ordre obtenu est  $f, c, e, d, b, a$ .

sommet choisi	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	X	6	6	6	6	
$b$		X		65		
$d$				X	64	4
$e$			63		X	43
$c$			X			
$f$						X

2. Parmi les graphes  $G1$ ,  $G2$  et  $G3$ , lesquels sont triangulés ? Justifier votre réponse et en cas de réponse négative, donner les sommets formant un cycle sans corde de longueur  $> 3$ .

Un graphe  $G$  est triangulé si et seulement si l'ordre retourné par LexBFS est un ordre d'élimination simplicial.

Pour  $G1$ , l'ordre obtenu par LexBFS est  $d, c, f, e, b, a$ . Le voisinage de  $d$  n'est pas une clique :  $e$  et  $f$  ne sont pas voisins. Donc  $G1$  n'est pas triangulé. Par exemple, le sous-graphe induit par  $\{a, d, e, f\}$  est un cycle de longueur 4 sans corde.

Pour  $G2$ , l'ordre obtenu par LexBFS est  $f, d, e, c, b, a$ . Lorsque l'on élimine les sommets dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $f : b, c, e \rightarrow K_3$
- $d : a, b \rightarrow K_2$
- $e : a, b, c \rightarrow K_3$
- $c : a, b \rightarrow K_2$
- $b : a \rightarrow K_1$
- $a : \emptyset$

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe  $G2$  est triangulé.

Pour  $G3$ , l'ordre obtenu par LexBFS est  $f, c, e, d, b, a$ . Lorsque l'on élimine les sommets dans cet ordre, leurs voisinages dans le graphe restant sont :

- $f : d, e \rightarrow K_2$
- $c : a, e \rightarrow K_2$
- $e : a, d \rightarrow K_2$
- $d : a, b \rightarrow K_2$
- $b : a \rightarrow K_1$
- $a : \emptyset$

Dans tous les cas, ces voisinages sont des cliques, donc l'ordre obtenu par LexBFS est bien simplicial et donc le graphe  $G3$  est triangulé.

3. Parmi les graphes  $G1$ ,  $G2$  et  $G3$ , lesquels sont des graphes d'intervalles? Justifier votre réponse et donner les intervalles en cas de réponse positive.

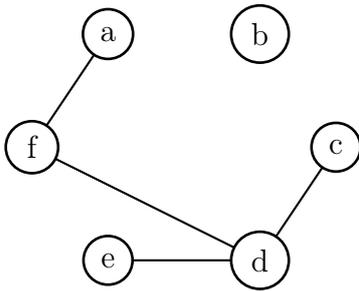


FIGURE 4 –  $\overline{G2}$

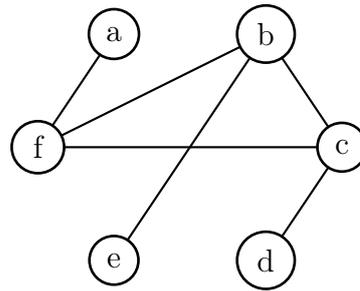


FIGURE 5 –  $\overline{G3}$

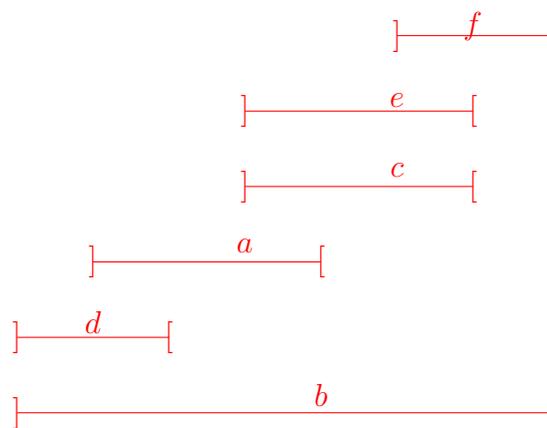


FIGURE 6 – Intervalles du graphe  $G2$

Le graphe  $G1$  n'est pas triangulé, donc n'est pas d'intervalles.

Le complémentaire du graphe  $G2$  est donné par la Figure 4.  $\overline{G2}$  admet une orientation transitive, par exemple  $af, df, de, dc$ . Les intervalles correspondants sont donnée par la Figure 6.

Le complémentaire du graphe  $G3$  est donné par la Figure 5. Le graphe  $G3$  n'est pas d'intervalles car son complémentaire  $\overline{G3}$  n'admet d'orientation transitive. En effet, si on oriente (sans perte de généralité) l'arête entre  $a$  et  $f$  de  $a$  vers  $f$ , on obtient les orientations suivantes :

$$af \Rightarrow bf, cf$$

$$bf \Rightarrow be$$

$$be \Rightarrow bc$$

On ne peut plus orienter l'arête entre  $c$  et  $d$  car  $bc \Rightarrow dc$  et  $cf \Rightarrow cd$