

### Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe  $G_1$  de la Figure 1, à partir du sommet  $a$ . En cas de choix sur l'ordre des sommets, privilégiez l'ordre alphabétique.
2. Le graphe  $G_1$  est-il triangulé ? Justifier votre réponse et en cas de réponse négative, donner les sommets formant un cycle sans corde de longueur  $> 3$ .
3. Le graphe  $G_1$  est-il un graphe d'intervalles ? Justifier votre réponse et donner les intervalles en cas de réponse positive.

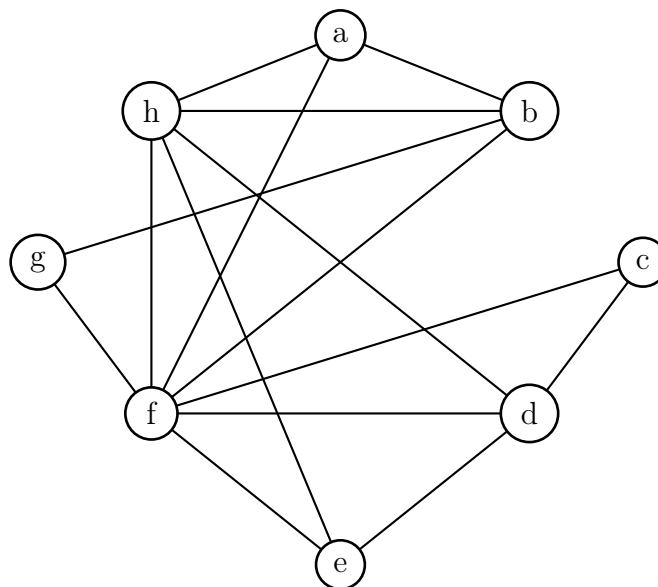


FIGURE 1 –  $G_1$

### Exercice 2

Soit  $G$  un graphe. On note  $V(G)$  l'ensemble de ses sommets,  $\omega(G)$  le cardinal maximum d'une clique de  $G$ ,  $\alpha(G)$  le cardinal maximum d'un stable de  $G$ ,  $\chi(G)$  son nombre chromatique et  $\kappa(G)$  le nombre minimum de cliques nécessaire pour couvrir  $V(G)$ .

1. Rappeler la définition d'un graphe parfait.
2. Montrer que si  $G$  est un graphe parfait, alors pour tout  $H$  sous-graphe induit de  $G$  :

$$\omega(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$$

On rappelle que cette condition est également suffisante pour qu'un graphe soit parfait. On rappelle également qu'un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait (Lovász, 1972).

3. Donner une caractérisation des graphes parfaits utilisant  $\alpha$  et  $\kappa$ .  
 Un graphe qui n'est pas parfait est dit *imparfait*. Un graphe  $G$  imparfait est *imparfait minimal* si tout  $H$  sous-graphe induit strict (ayant au moins un sommet de moins) de  $G$  est parfait.
4. On considère  $C_7$  le cycle à 7 sommets et son complémentaire  $\overline{C_7}$ . Donner les valeurs de  $\chi(C_7)$ ,  $\chi(\overline{C_7})$ ,  $\omega(C_7)$  et  $\omega(\overline{C_7})$ .  $C_7$  et  $\overline{C_7}$  sont-ils imparfaits minimaux? Justifiez votre réponse.
5. Soit  $G$  un graphe imparfait minimal et  $x$  un sommet de  $G$ .  $G - x$  désigne le sous-graphe de  $G$  induit par  $V(G) \setminus \{x\}$ . Quelles sont les relations, en termes d'égalités, entre :  
 —  $\chi(G)$ ,  $\chi(G - x)$ ,  $\omega(G)$  et  $\omega(G - x)$ ?  
 —  $\kappa(G)$ ,  $\kappa(G - x)$ ,  $\alpha(G)$  et  $\alpha(G - x)$ ?
6. Soit  $S$  un ensemble stable d'un graphe  $G$  imparfait minimal et  $G - S$  le sous-graphe de  $G$  induit par  $V(G) \setminus S$ . Montrer que  $\omega(G - S) = \omega(G)$  (indication : on montrera que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G - S) \geq \chi(G) - 1$ ).
7. Soit  $G$  un graphe minimal imparfait avec  $n = |V(G)|$ ,  $\alpha = \alpha(G)$  et  $\omega = \omega(G)$ .  
 (a) Montrer que  $n = \alpha\omega + 1$  (indication : utiliser les égalités de la question 5).  
 (b) Montrer que pour tout sommet  $x$  de  $G$ ,  $G \setminus x$  admet une partition de l'ensemble de ses sommets en  $\omega$  stables de taille  $\alpha$ .  
 (c) Montrer que pour tout sommet  $x$  de  $G$ ,  $G \setminus x$  admet une partition de l'ensemble de ses sommets en  $\alpha$  cliques de taille  $\omega$ .  
 (d) Montrer que  $G$  contient  $n (= \alpha\omega + 1)$  ensembles stables maximums  $S_1, \dots, S_n$  et  $n$  cliques maximums  $C_1, \dots, C_n$  tels que :  
 i. chaque sommet de  $G$  appartient à exactement  $\alpha$  stables  $S_i$ .  
 ii. chaque sommet de  $G$  appartient à exactement  $\omega$  cliques  $C_i$ .  
 iii.  $C_i \cap S_i = \emptyset$ , pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$   
 iv.  $|C_i \cap S_j| = 1$ , pour tout  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$