

Algorithmique et graphes, thèmes du second degré

Feuille TD n° 4 – Exercices (Graphes)

Exercice 1. L'allumeur de réverbère du Petit Prince (un classique s'il en est !...)

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

- Faites un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.
- Décrivez cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
- Soit M la matrice de transition associée à ce graphe. Vérifiez que $M = N - \frac{1}{2} R$, où :

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Calculez N^2 , R^2 , NR et RN puis en déduire M^n pour tout entier naturel n .
- Au jour 0, le réverbère est allumé (respectivement éteint). Calculez la probabilité p_n (respectivement p'_n) que le réverbère soit allumé (respectivement éteint) au n -ième jour.

Exercice 2. Fumeurs et non fumeurs (Annales – Centres étrangers – juin 2005)

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ». Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.

On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n ,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n , où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs. On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

- Traduisez les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

Justifiez l'égalité matricielle $(f_{n+1} \ g_{n+1}) = (f_n \ g_n) \times A$, où A désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

- Déterminez le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.

- Déterminez l'état probabiliste stable et l'interpréter.
- Montrer que, pour tout entier naturel n , $f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1$.
- On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = f_n - 0,2$.
 - Montrez que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Donnez l'expression de u_n en fonction de n .
 - Déduisez-en que, pour tout entier naturel n , $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
 - Déterminez la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et interprétez-là.

Exercice 3. Sorties pédagogiques (Annales – Amérique du Sud, novembre 2004)

Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques, une sortie A et une sortie B : 20% des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B. Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année. Ainsi 30% des élèves favorables à la sortie A et 20% des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.

On note :

- a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
- b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
- P_n la matrice $(a_n ; b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n .
- Déterminez l'état initial P_1 .
- Représentez la situation par un graphe probabiliste.
- Déduisez-en que $P_{n+1} = P_n \times M$, où M est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

- Déterminez l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.
- Déterminez le réel x tel que $(x \ 1-x) \times M = (x \ 1-x)$.
- On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?