

Éléments de Théorie des Graphes

Graphes probabilistes Quelques variations libres

Éric SOPENA, eric.sopena@labri.fr

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

Septième partie

Graphes probabilistes

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

Systèmes de transitions

On s'intéresse à l'évolution de **systèmes** qui peuvent se trouver dans certains **états**, que l'on notera e_1, e_2, \dots et changer d'état selon certaines **probabilités de transition**.

Ces systèmes se modélisent de façon tout à fait naturelle par des graphes orientés valués spécifiques que l'on appellera **graphes probabilistes** (ou **graphes de transition**).

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

3

Graphes probabilistes (1)

Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté valué $G = (E, T, p)$, où :

- $E = \{ e_1, \dots, e_k \}$ est un ensemble fini d'**états**,
- T un ensemble de **transitions** (arcs) valués par une fonction p leur associant un nombre réel compris entre 0 et 1, correspondant à une probabilité de transition, et vérifiant la propriété suivante :
pour tout état e_i , la somme des probabilités des transitions issues de e_i vaut 1.

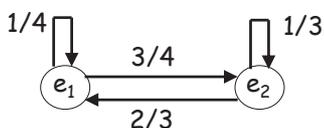
On note $p_{i,j}$ la probabilité de transition de e_i vers e_j .

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

4

Graphes probabilistes (2)

Exemple.



On peut définir une **loi de probabilité** sur l'ensemble des états, donnant la probabilité de se retrouver dans chacun des états après n transitions (à l'instant n).

Cette loi de probabilité peut être représentée par une matrice ligne :

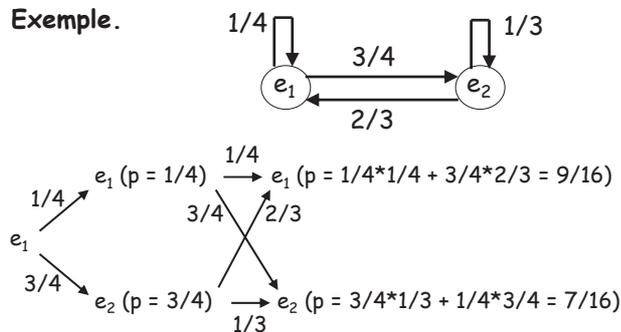
$P_0 = [1,0]$ - $P_1 = [1/4, 3/4]$ - $P_2 = [9/16, 7/16]$ - etc.

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

5

Graphes probabilistes (2)

Exemple.



$P_0 = [1,0]$ - $P_1 = [1/4, 3/4]$ - $P_2 = [9/16, 7/16]$ - etc.

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

6

Matrices de transition

À un tel graphe probabiliste, on associe une **matrice de transition** M permettant de retrouver les valeurs des différentes transitions.

La matrice de transition M associée à un graphe probabiliste $G = (E, T, p)$, avec $|E| = k$, est la matrice $k \times k$ définie par $M[i,j] = p_{i,j}$ ($p_{i,j} = 0$ s'il n'existe pas de transition de e_i vers e_j).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline 1/4 & 3/4 \\ \hline 2/3 & 1/3 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad M = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

On a alors $P_n = P_{n-1} \times M = P_0 \times M^n$ pour tout $n \geq 0$.

État stable (1)

On dit qu'un état probabiliste P_n est **stable** ssi

$$P_{n+1} = P_n \times M = P_n$$

(cet état n'évoluera donc plus).

Pour déterminer l'état stable d'un système de matrice de transition M , il suffit donc de résoudre l'équation

$$P = P \times M$$

avec $P = [a, 1-a]$, $0 \leq a \leq 1$.

État stable (2)

L'existence d'un état stable est assurée dans les cas suivants :

Théorème. Si tous les coefficients de M sont strictement positifs, la suite des états probabilistes $(P_n)_{n \geq 0}$ converge vers un état stable π indépendant de l'état initial.

Par ailleurs, la suite $(M^n)_{n \geq 0}$ converge vers une matrice M^* dont toutes les lignes sont égales à π .

État stable (3)

Dans le cas d'un système à deux états, cet état stable se calcule aisément. Nous devons en effet résoudre le système suivant :

$$[a \quad 1-a] = [a \quad 1-a] \times \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

d'où $a = q/(p+q)$ et donc :

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$$

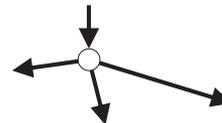
Huitième partie

Quelques variations libres

Diffusion d'informations

Le sommet A veut diffuser une information à l'ensemble du réseau...

Algorithme 1



Lorsqu'un sommet reçoit l'information pour la première fois, il la diffuse à ses autres voisins...

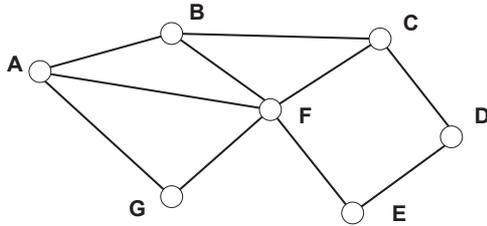
Mesures :

- > nombre de messages transmis (charge)
- > nombre d'étapes (temps)

Algorithme 1 (1)

messages : 0

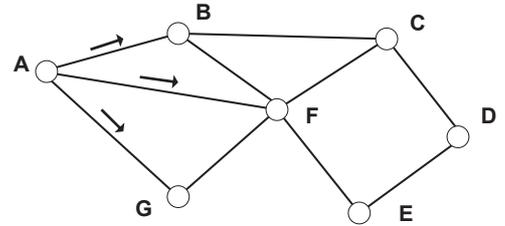
étapes : 0



Algorithme 1 (2)

messages : 3

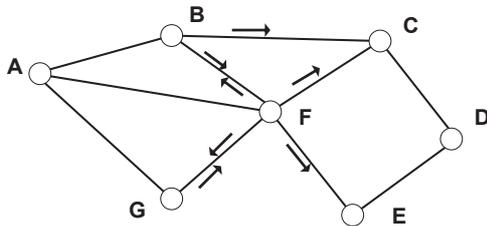
étapes : 1



Algorithme 1 (3)

messages : 10

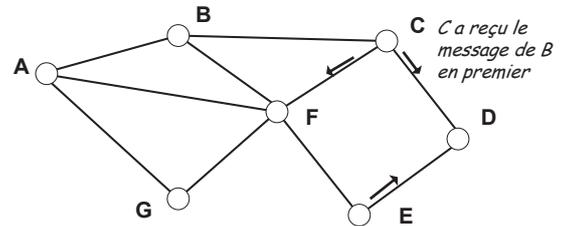
étapes : 2



Algorithme 1 (4)

messages : 13

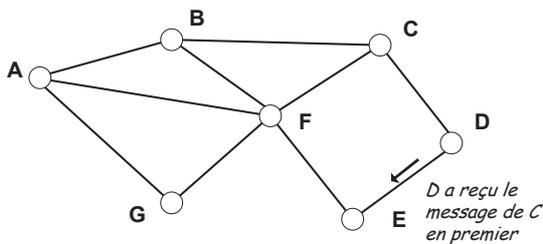
étapes : 3



Algorithme 1 (5)

messages : 14

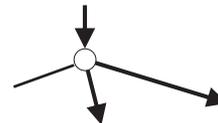
étapes : 4



Diffusion d'informations

Le sommet A veut diffuser une information à l'ensemble du réseau...

Algorithme 2



Idem algorithme 1, mais en utilisant les arêtes d'un arbre recouvrant...

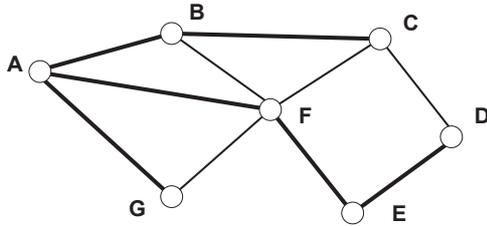
Mesures :

- > nombre de messages transmis (charge)
- > nombre d'étapes (temps)

Algorithme 2 (1)

messages : 0

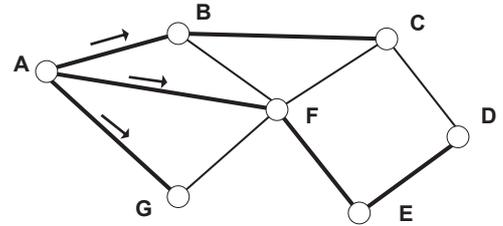
étapes : 0



Algorithme 2 (2)

messages : 3

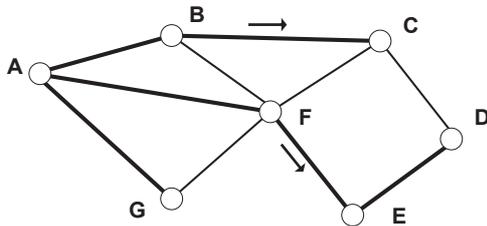
étapes : 1



Algorithme 2 (3)

messages : 5

étapes : 2



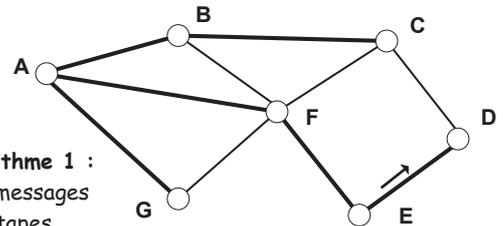
Algorithme 2 (4)

optimal
(6 sommets à informer)

profondeur
de l'arbre

messages : 6

étapes : 3



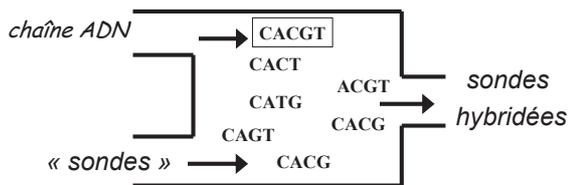
Algorithme 1 :

- > 14 messages
- > 4 étapes

Décodage de chaînes d'ADN (1)

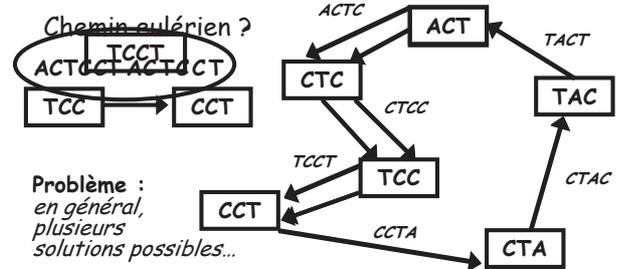
Chaîne d'ADN = séquence de nucléotides A,C,G,T :
Adénine, Cytosine, Guanine, Thymine

Séquençage par « hybridation »



Décodage de chaînes d'ADN (2)

Sondes hybridées : TCCT, ACTC, CTAC, TCCT, ACTC, CTCC, TACT, CCTA, CTCC



Problème :
en général,
plusieurs
solutions possibles...

Le graphe de Hollywood (1)

- Sommets = acteurs
- Arêtes entre acteurs ayant joué dans un même film...

Propriété

Tout acteur est à distance au plus 6 de Kevin Bacon !...



Le graphe de Hollywood (2)

Site Web :

<http://oracleofbacon.org/>
The Oracle of Bacon at Virginia

Louis de Funes has a Bacon number of 2.

Louis de Funes was in *Aventures de Rabbi Jacob, Les* (1973) with Janet Brandt

Janet Brandt was in *Queens Logic* (1991) with Kevin Bacon

Le graphe de Hollywood (3)

Site Web :

<http://oracleofbacon.org/>
The Oracle of Bacon at Virginia

Catherine Deneuve has a Bacon number of 2.

Catherine Deneuve was in *Anima persa* (1977) with Vittorio Gassman

Vittorio Gassman was in *Sleepers* (1996) with Kevin Bacon

Le graphe de Hollywood (4)

Site Web :

<http://oracleofbacon.org/>
The Oracle of Bacon at Virginia

Audrey Tautou has a Bacon number of 3.

Audrey Tautou was in *Venus beauté (institut)* (1999) with Bulle Ogier

Bulle Ogier was in *Merci Docteur Rey* (2002) with Eli Wallach

Eli Wallach was in *Mystic River* (2003) with Kevin Bacon

Graphes « petit monde » (1)

Le graphe de Hollywood est un graphe « petit monde »

Grappe « petit monde » :

- faible diamètre
- densité globale faible
- densité locale forte

Autres exemples de graphes « petit monde » :

- graphe du web (liens entre pages),
- réseau électrique de l'ouest des États-unis,
- graphe des citations (articles scientifiques),
- réseau neuronal du ver *Caenorhabditis elegans*.

Graphes « petit monde » (2)

Intérêt des graphes petits mondes

Modélisation de nombreuses situations concrètes :

- réseaux réels (électrique, informatique, ...)
- graphe du web
- sociologie
- propagation d'épidémies
- etc.

Nombreux problèmes algorithmiques (simulation de systèmes complexes, plus courts chemins, graphes dynamiques, etc.).