

Algorithmique et graphes, thèmes du second degré

Feuille TD n° 2 – Exercices (Graphes)
Éléments de correction

Exercice 1. Algorithme First-Fit et nombre chromatique.

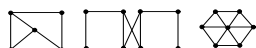
Montrez que pour tout graphe G , il existe un ordre de ses sommets pour lequel l'algorithme First-Fit produit une coloration optimale, c'est-à-dire utilisant $\chi(G)$ couleurs.

Soit G un graphe de nombre chromatique k . Il existe donc une k -coloration de G , soit c une telle coloration. On ordonne les sommets de la façon suivante : les sommets auxquels c a affecté la couleur 1 (dans n'importe quel ordre), puis la couleur 2 (dans n'importe quel ordre), et ainsi de suite jusqu'à la couleur k .

On vérifie alors aisément que, pour cet ordre, l'algorithme First-Fit attribue à tout sommet une couleur inférieure ou égale à la couleur que lui avait attribuée c : par récurrence, cette propriété est vraie pour les sommets u tels que $c(u) = 1$ car First-Fit leur attribue à tous la couleur 1 ; ensuite, si u est un sommet avec $c(u) = i$, u n'est relié qu'à des voisins déjà coloriés auxquels c a attribué une couleur inférieure ou égale à $i-1$... First-Fit attribuera donc à u une couleur inférieure ou égale à i . Cqfd.

Exercice 2. Algorithme de Welsh et Powell.

Appliquer l'algorithme de Welsh et Powell aux graphes suivants :



Pour le premier graphe, on doit commencer par les sommets de degré 3 et terminer par le sommet de degré 2. Quel que soit l'ordre choisi pour les sommets de degré 3, l'algorithme produit une 3-coloration. Pour le deuxième graphe, on obtient une 2-coloration quel que soit l'ordre choisi pour les sommets de degré 3 puis pour les sommets de degré 2.

Pour le troisième graphe, après avoir colorié le sommet central, l'ordre de traitement des sommets de degré 3 est important : on obtient, selon les cas, une 3- ou 4-coloration du graphe...

Exercice 3. Ballon de football.

En utilisant la formule d'Euler, montrez qu'un ballon de football, composé d'hexagones et de pentagones, contient nécessairement 12 pentagones.

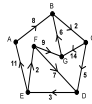
La juxtaposition des pièces de cuir, pentagones ou hexagones, représentant un graphe planaire (dessiné sur une sphère) dont les sommets sont de degré 3. Le nombre de faces vaut $f = p + h$, où p désigne le nombre de pentagones et h le nombre d'hexagones. Le nombre d'arêtes vaut alors $\frac{1}{2}(5p+6h)$ et le nombre de sommets $\frac{1}{3}(5p+6h)$. La formule d'Euler donne alors :

$$\frac{1}{3}(5p+6h) - \frac{1}{2}(5p+6h) + p + h = 2,$$

d'où $p = 12$, après simplification...

Exercice 2. Algorithme de Dijkstra.

Exécutez l'algorithme de Dijkstra sur le graphe suivant, à partir du sommet C.



L'évolution des valeurs de L , $PERE$ et $Etat$ ($D = dedans$, $A = Atteint$ et $H = deHors$) est donnée par le tableau suivant :

Sommet	L	$Pere$	$Etat$
A	∞ 19	A E	H A D
B	∞ 20	B G	H A D
C	0	C	A D
D	∞ 5	D C	H A D
E	∞ 8	E D	H A D
F	∞ 10	F E	H A D
G	∞ 14	G F	H A D

Pour aller, par exemple, de C à A, le chemin est donné (à l'envers) par le tableau $PERE$: C D E A, et ce chemin est de coût $L(A) = 19$.