

## Éléments de Théorie des Graphes

Introduction, définitions  
Les graphes : un outil de modélisation  
Représentation des graphes

Éric SOPENA, eric.sopena@labri.fr

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

## Première partie

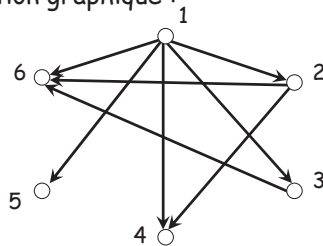
## Introduction, définitions

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

### Graphe d'une relation (petite école...)

Soit la relation  $R$  sur  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  définie par :  
 $x R y$  si et seulement si  $x \mid y$  ( $x$  divise  $y$ )

Représentation graphique :

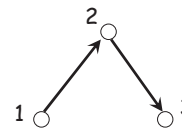


ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

3

### Graphe orienté (définition)

Un **graphe orienté**  $G$  est un couple  $G = (S, A)$  où  
-  $S$  est un ensemble fini de **sommets**  
-  $A$  est un ensemble de couples de sommets  
appelés **arcs**



$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$A = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

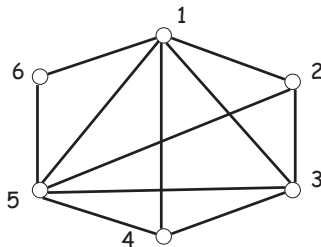
4

### Graphe d'une relation symétrique (1)

Soit la relation  $R$  sur  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  définie  
par :

$x R y$  ssi  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux

Représentation  
graphique :



ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

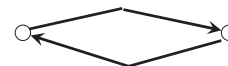
5

### Grashe d'une relation symétrique (2)

En réalité,



est un « raccourci » de dessin pour :



Nous avons un grashe orienté **symétrique**, appelé  
**grashe non orienté**...

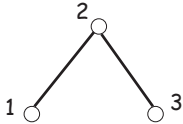
ENSM - Éléments de Théorie des Graphes

6

### Graphe non orienté (définition)

Un **graphe non orienté**  $G$  est un couple  $G = (S, A)$  où

- $S$  est un ensemble fini de **sommets**
- $A$  est un ensemble de « paires » de sommets appelées **arêtes**



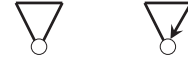
$$S = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$A = \{ \{1,2\}, \{2,3\} \}$$

équivalent à  $A = \{ (1,2), (2,1), (2,3), (3,2) \}$

### Boucles, graphes simples, multigraphes

Une **boucle** :



On parle de **multigraphe** (orienté ou non orienté) si on autorise plusieurs arêtes (ou arcs) entre deux sommets (arêtes multiples).



On appelle **graphe simple** un graphe sans arêtes (ou arcs) multiples.

### Degré d'un sommet, voisinages (1)

#### Cas non orienté

Si  $\{u,v\}$  est une arête,  $u$  et  $v$  sont **voisins**.

Le **degré** d'un sommet  $u$ , noté  $d(u)$ , est le nombre de voisins de  $u$  (*attention : les boucles comptent double...*).

On note  $\Delta(G)$  le *degré maximum* de  $G$ , et  $\delta(G)$  le *degré minimum* de  $G$ .

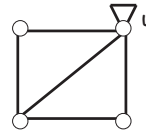
#### Cas orienté

Si  $(u,v)$  est un arc,  $u$  est un **prédécesseur** de  $v$  et  $v$  est un **successeur** de  $u$ ,  $u$  et  $v$  sont **voisins**.

Le nombre de prédécesseurs de  $u$  est le **degré entrant** de  $u$ , noté  $d^-(u)$ , le nombre de successeurs de  $u$  est le **degré sortant** de  $u$ , noté  $d^+(u)$ , le nombre de voisins de  $u$  est le **degré** de  $u$ , noté  $d(u)$  :  $d(u) = d^-(u) + d^+(u)$ .

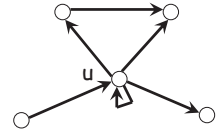
### Degré d'un sommet, voisinages (2)

Exemples :



$$\begin{aligned} d(u) &= 5 \\ \Delta(G) &= 5 \\ \delta(G) &= 2 \end{aligned}$$

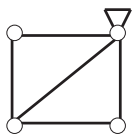
$$\begin{aligned} d^-(u) &= 2 \\ d^+(u) &= 4 \\ d(u) &= 6 \end{aligned}$$



### Degré d'un sommet, voisinages (3)

Pour tout graphe  $G$ , la somme des degrés des sommets de  $G$  est égale à deux fois le nombre d'arêtes de  $G$  (lemme des poignées de mains).

Pour tout graphe orienté  $G$ , la somme des degrés entrants des sommets de  $G$  est égale à la somme des degrés sortants des sommets de  $G$  et au nombre d'arcs de  $G$  (lemme des coups de pieds).



$$2 + 5 + 2 + 3 = 2 \times 6 = 12$$

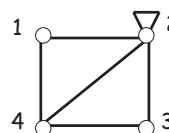
Récurrance sur nombre d'arcs ou d'arêtes...

### Chemins, cycles et circuits (1)

Un **chemin de longueur  $k$**  dans un graphe non orienté est une suite de  $k+1$  sommets  $u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$ , telle que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $u_i u_{i+1}$  est une arête (longueur = nombre d'arêtes).

Si tous les sommets sont distincts, le chemin est **élémentaire**.

Si  $u_1 = u_{k+1}$ , le chemin est un **cycle**.



12232412 est un chemin  
123 est un chemin élémentaire  
12243241 est un cycle  
2342 est un cycle élémentaire

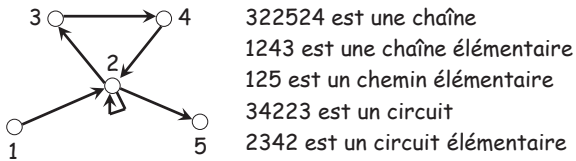
## Chemins, cycles et circuits (2)

Une **chaîne de longueur k** dans un graphe orienté est une suite de  $k+1$  sommets  $u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$ , telle que pour tout  $i, 1 \leq i \leq k$ ,  $u_i u_{i+1}$  ou  $u_{i+1} u_i$  est un arc (longueur = nombre d'arcs).

**Chemin de longueur k** :  $u_i u_{i+1}$  est un arc pour tout  $i$ .

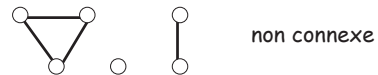
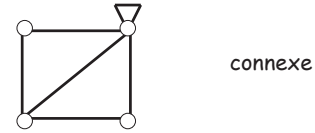
**Élémentaire** : idem.

**Circuit** : chemin tel que  $u_1 = u_{k+1}$ .



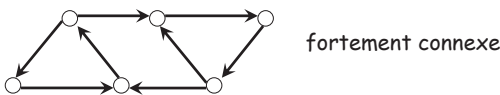
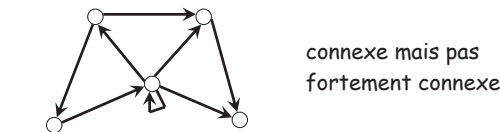
## Connexité (1)

Un graphe non orienté est **connexe** si pour tous sommets  $u$  et  $v$  il existe un chemin allant de  $u$  à  $v$ .



## Connexité (2)

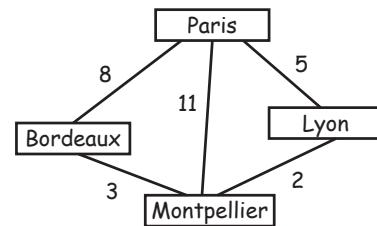
Un graphe orienté est **connexe** (resp. **fortement connexe**) si pour tous sommets  $u$  et  $v$  il existe une chaîne (resp. un chemin) allant de  $u$  à  $v$ .



## Graphes valués, graphes étiquetés

Un graphe est **valué** si on associe des valeurs à ses arcs (ou arêtes).

Un graphe est **étiqueté** si on associe des étiquettes à ses sommets.

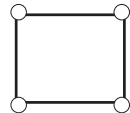


## Types particuliers de graphes (1)

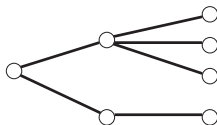
Un **chemin** :



Un **cycle** :

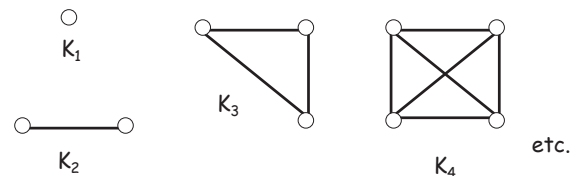


Un **arbre** :



## Types particuliers de graphes (2)

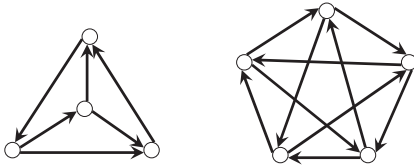
Un graphe est **complet** si tous ses sommets sont reliés deux à deux.



On note  $K_n$  le graphe complet à  $n$  sommets.

### Types particuliers de graphes (3)

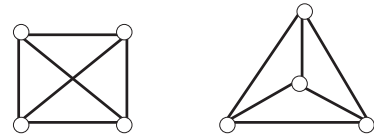
Un graphe complet orienté (antisymétrique) est un **tournoi**.



### Types particuliers de graphes (4)

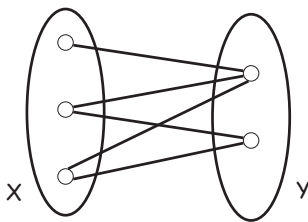
Un graphe est **planaire** s'il peut être dessiné (sur le plan ou la sphère) sans que ses arêtes se croisent.

Exemple :



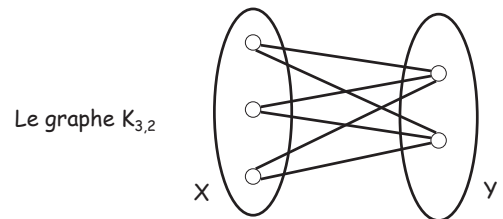
### Types particuliers de graphes (5)

Un graphe est **biparti** s'il existe une partition de l'ensemble de ses sommets,  $S = X \cup Y$ , telle que toutes les arêtes relient un sommet de  $X$  à un sommet de  $Y$ .



### Types particuliers de graphes (6)

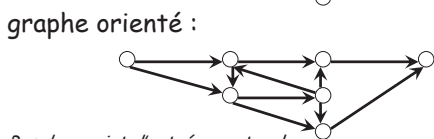
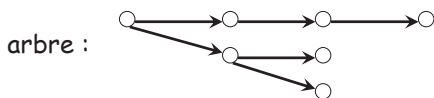
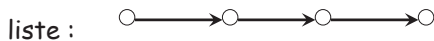
Un graphe est **biparti complet** s'il est biparti et si toutes les arêtes possibles entre  $X$  et  $Y$  sont présentes.



On note  $K_{n,m}$  le graphe biparti complet avec  $|X| = n$  et  $|Y| = m$ .

### Listes, arbres et... graphes !

Ce sont des généralisations successives :

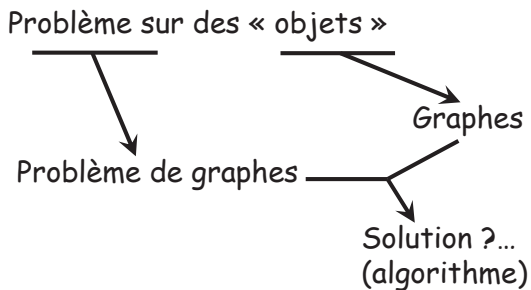


*Pas de « point d'entrée » naturel...*

## Deuxième partie

# Les graphes : un outil de modélisation

## Modélisation et résolution de problèmes



## Quelques exemples généraux

### Théorie des jeux

- ✓ sommets : positions de jeux,
- ✓ arcs : mouvements de jeux,
- ✓ problème : atteindre une position gagnante

### Transport routier (ferroviaire, aérien)

- ✓ graphe : réseau routier (orienté ou non)
- ✓ problèmes : recherche / optimisation de trajet

### Réseaux numériques

- ✓ graphe : réseau (orienté ou non)
- ✓ problèmes : routage d'information, optimisation de débit

Etc.

## Un problème de plus court chemin (1)

### Question :

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, on dispose de deux jarres, l'une de 5 litres, l'autre de 3 litres.

### Modélisation :

sommets : couples (contenu J5, contenu J3)  
arcs : opérations autorisées

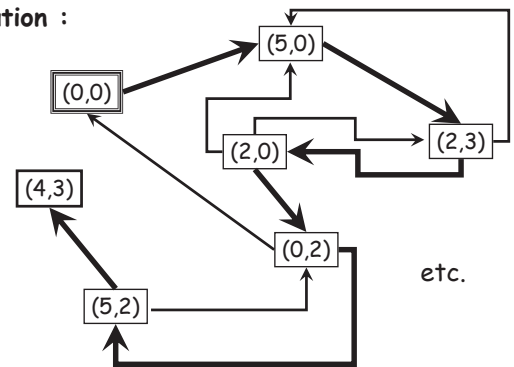
Exemples :  $(4,1) \rightarrow (2,3)$  ou encore  $(4,1) \rightarrow (0,1)$

### Problème :

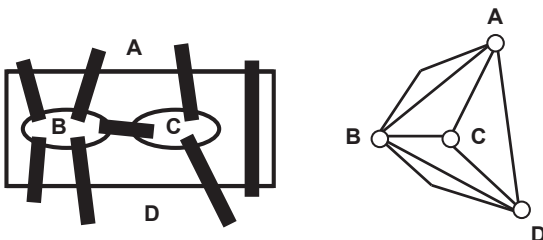
Trouver un plus court chemin reliant  $(0,0)$  à  $(4,x)$ .

## Un problème de plus court chemin (2)

### Solution :



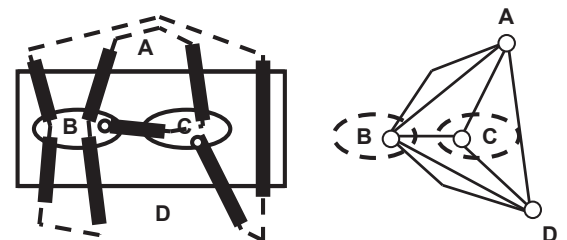
## Les ponts de Königsberg (1)



### Problème :

Trouver un cycle (chemin) passant une et une seule fois par chaque arête.

## Les ponts de Königsberg (2)



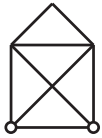
Il existe un cycle « eulérien » si et seulement si tous les sommets sont de degré pair...

Il existe un chemin « eulérien » si et seulement si 0 ou 2 sommets sont de degré impair...

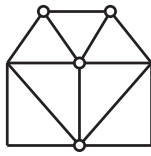
### Un problème similaire (petite école)

#### Problème :

Peut-on tracer les figures suivantes sans lever le crayon ?



OUI



NON

### Troisième partie

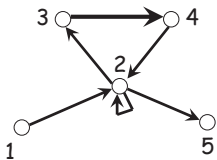
## Représentation des graphes (structure de données)

### Matrices d'adjacence - Cas orienté

**Définition.** Soit  $G = (S, A)$  un graphe (orienté ou non) avec  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ; la **matrice d'adjacence** de  $G$ , notée  $M = M(G)$ , est la matrice  $n \times n$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  définie par :

$M[i, j] = 1$  ssi  $(i, j)$  est un arc (arête) de  $G$

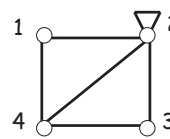
Exemple :



|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

### Matrices d'adjacence - Cas non orienté

**Remarque :** dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est **symétrique**.



M :

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Représentation compacte :

$M[i, j] = T[(i-1)/2 + j]$  ( $i > j$ ), ainsi  $M[3, 4] = M[4, 3] = T[9]$

T :

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |   |   |   |   |   |   |

### Matrices d'adjacence - Complexité

$n$  = nombre de sommets

**Complexité en espace :**  $O(n^2)$

*quel que soit le nombre d'arcs, donc coûteux pour les graphes peu denses...*

**Complexité en temps de quelques opérations :**

tester la présence d'un arc de  $i$  vers  $j$  :  $O(1)$

parcourir les voisins d'un sommet :  $O(n)$

parcourir tous les arcs :  $O(n^2)$

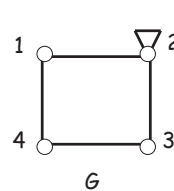
### Matrices d'adjacence - Remarque (1)

Considérons les opérations (booléennes) suivantes :

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

**Proposition**  
 $M^k[i, j] = 1$  ssi il existe un chemin de longueur  $k$  allant de  $i$  à  $j$



M

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$M^2$

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 |

## Matrices d'adjacence - Remarque (2)

### Preuve par récurrence sur k.

- $k = 1$ .  $M^1 = M$ , donc vrai par définition (arc = longueur 1)
- Supposons vrai jusqu'au rang  $k-1$ .

On a  $M^k = M \times M^{k-1}$ ,  
et donc pour tout couple  $(i,j)$  :

$$M^k[i,j] = M[i,1] \times M^{k-1}[1,j] + \dots + M[i,s] \times M^{k-1}[s,j] + \dots + M[i,n] \times M^{k-1}[n,j]$$

Ainsi,  $M^k[i,j] = 1$

ssi il existe  $s$  tel que  $M[i,s] \times M^{k-1}[s,j] = 1$

i.e. ssi il existe un sommet  $s$  tel que

- $M[i,s] = 1$ , i.e. l'arc  $(i,s)$  existe
- $M^{k-1}[s,j] = 1$ , i.e. il existe un chemin de longueur  $k-1$  de  $s$  à  $j$ .

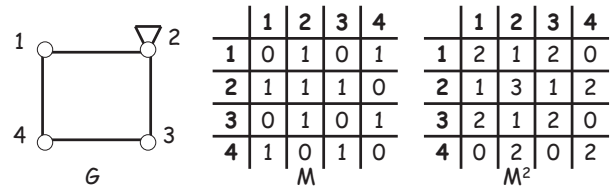
i.e. il existe un chemin de longueur  $k$  de  $i$  à  $j$ .

CQFD.

## Matrices d'adjacence - Remarque (3)

En utilisant les opérations  $+$  et  $\times$  usuelles, nous avons :

**Proposition.**  $M^k[i,j] = p$  ssi il existe  $p$  chemins de longueur  $k$  allant de  $i$  à  $j$



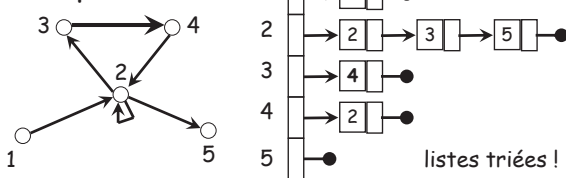
**Exercice.** Prouvez ce résultat.

## Listes d'adjacence - Cas orienté

**Définition.** La **liste d'adjacence** d'un sommet  $u$  est la liste des successeurs de  $u$  (ou des voisins de  $u$  dans le cas non orienté).

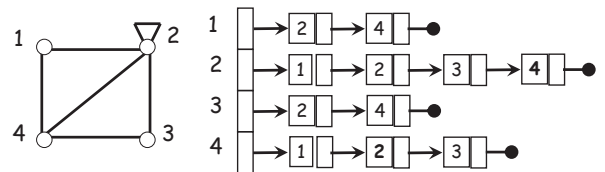
Un graphe peut alors être représenté par l'ensemble (tableau, liste) des listes d'adjacence de ses sommets.

Exemple :



## Listes d'adjacence - Cas non orienté

**Remarque.** Dans le cas des graphes non orientés, chaque arête apparaît dans 2 listes.



On utilise plutôt des **listes de listes** si le graphe peut évoluer par ajout ou suppression de sommets.

## Listes d'adjacence - Complexité

$n$  = nombre de sommets,  $m$  = nombre d'arcs

**Complexité en espace :**  $O(n + m)$

*optimal...*

**Complexité en temps de quelques opérations :**

tester la présence d'un arc de  $i$  vers  $j$  :  $O(n)$

parcourir les voisins d'un sommet :  $O(n)$

parcourir tous les arcs :  $O(n + m)$