

Algorithmique et graphes, thèmes du second degré

Contrôle Continu n° 2 (durée 1h00)
éléments de correction

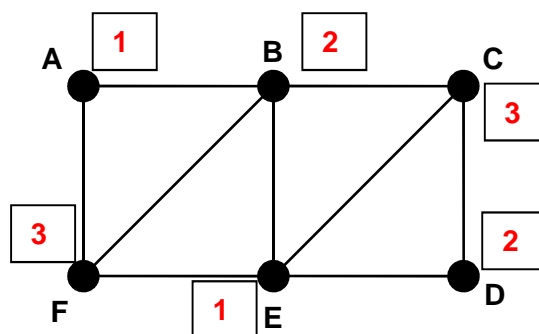
Exercice 1. La traduction Python est la suivante :

```
# ce script python calcule le reste de la division entière
# d'un entier naturel a par un entier naturel b

# entrée des données
a = int(input("Entrez a : "))
b = int(input("Entrez b : "))
if (b == 0) :
    print("Division impossible...")
else :
    # initialisation du reste
    reste = a
    # boucle de calcul du reste
    while ( reste >= b ) :
        reste = reste - b
    # affichage du résultat
    print("Reste = ", reste )
```

Exercice 2. Le degré du sommet A vaut 4 (la boucle compte pour 2), celui du sommet B vaut également 4. Les plus courts chemins reliant A à D sont de longueur 3 : ABCD, ABED, AFED. Les cycles élémentaires de longueur 5 sont ABCEFA et BCDEFB. Le graphe G contient des cliques de taille 3 (triangles) mais aucune clique de taille 4. Le nombre de stabilité de G vaut 2 (il n'existe aucun triplet de sommets deux à deux non adjacents).

Exercice 3. Le graphe G contenant une clique de taille 3, nous avons $\chi(G) \geq 3$. La 3-coloration de G suivante nous permet alors de conclure que $\chi(G) = 3$.



Si un graphe contient une boucle sur un sommet u , il ne peut être colorié. En effet, uu est une arête et nous ne pouvons pas avoir de coloration c telle que $c(u) \neq c(u)$...

Exercice 4. Un cycle eulérien est un cycle passant une et une seule fois par chaque arête du graphe. Un chemin eulérien est un chemin passant une et une seule fois par chaque arête du graphe. D'après le Théorème d'Euler, un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. Il admet un chemin eulérien si et seulement si il est connexe et il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.

Soit G un graphe régulier à n sommets ayant kn arêtes. Tous les sommets ont même degré, disons d , et ce degré doit être pair. D'après le lemme des poignées de mains, la somme des degrés des sommets de G vaut $dn = 2kn$. Ainsi, $d = 2k$ et il est bien pair. Pour que G contienne un cycle, il faut

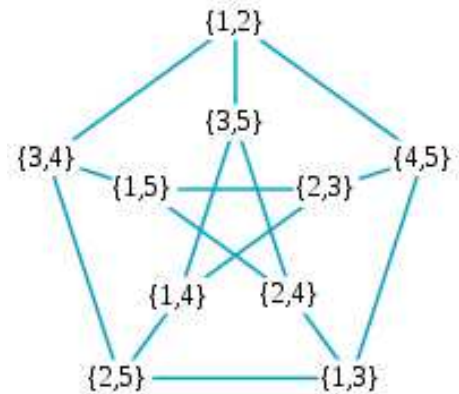
naturellement avoir $d \geq 2$, et donc $k \geq 1$, mais k est un entier strictement positif, donc pas de problème. Le graphe étant sans arêtes multiples, le degré maximum d'un sommet (ici $d = 2k$) ne peut excéder $n-1$. Ainsi, $2k$ ne peut excéder $n-1$. Par ailleurs, un graphe simple à n sommets ne peut contenir un cycle que si n vaut au moins 3.

Nous avons donc exhibé deux conditions nécessaires : (1) $2k \leq n-1$ et (2) $n \geq 3$.

Exercice 5. Le nombre de sommets de P est le nombre de sous-ensembles à deux éléments de X , soit 10. Chaque sommet, de la forme $\{a, b\}$ est adjacent aux sous-ensembles à deux éléments de $X \setminus \{a, b\}$; son degré est donc le nombre de sous-ensembles à deux éléments d'un ensemble à trois éléments, soit 3 (le graphe est donc régulier). La somme des degrés des sommets vaut alors $3 \cdot 10 = 30$, le nombre d'arêtes est donc $30/2 = 15$.

Le diamètre de P est 2. En effet, soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{c, d\}$ deux sommets distincts de P ; si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont voisins (distance 1); sinon, ils ont un élément commun, disons $a = c$ sans perte de généralité. Nous avons alors un chemin de longueur 2 reliant A à B : $\{a, b\} \{x, y\} \{a, d\}$, avec $x \neq y$ et $x, y \in X \setminus \{a, b, d\}$ (car X contient 5 éléments).

Le graphe P est connu sous le nom de graphe de Petersen (voir ci-contre).



Exercice 6. Nous avons $u^2 = 01010101$, $uv = 010111111$ et $vu = 111110101$. De plus, $|u| = 4$, $|v| = 5$, $|u|_0 = 2$, $|v|_0 = 0$, $|u|_1 = 2$ et $|v|_1 = 5$.

Exercice 7. Les deux automates finis déterministes sont les suivants :

