

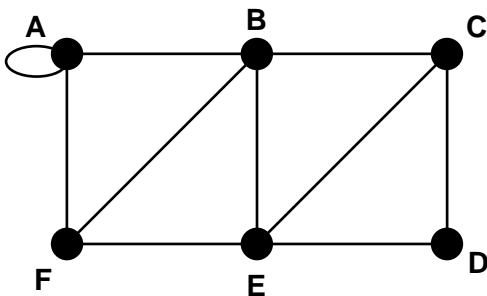
Algorithmique et graphes, thèmes du second degré

Contrôle Continu n° 2 (durée 1h00) Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre

Exercice 1. Traduisez en Python l'algorithme suivant :

```
Algorithme resteDivisionEntière
# cet algorithme calcule le reste de la division entière
# d'un entier naturel a par un entier naturel b
variables a, b, reste : entiers naturels
début
    # entrée des données
    Entrer ( a, b )
    si ( b = 0 )      # test validité
    alors Afficher ( "Division impossible...")
    sinon            début
        # initialisation du reste
        reste ← a
        # boucle de calcul du reste
        tantque ( reste ≥ b ) faire
            reste ← reste - b
        fin_tantque
        # affichage du résultat
        Afficher ( reste )
    fin
fin
```

Exercice 2. Considérons le graphe G ci-dessous.



Quel est le degré du sommet A ? du sommet B ?

Quelle est la longueur d'un plus court chemin reliant A à D ? Quels sont les plus courts chemins reliant A à D ?

Quels sont les cycles élémentaires de longueur 5 de G ?

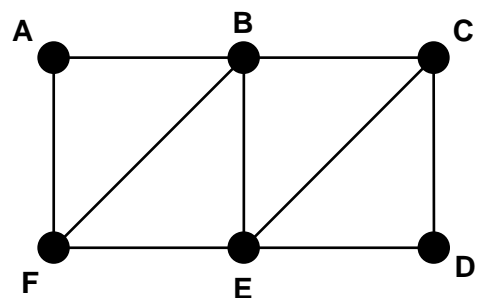
Quelle est la taille maximale d'une clique dans G ?

Quel est le nombre de stabilité (taille maximale d'un ensemble de sommets stable, ou indépendant) de G ?

Exercice 3. Considérons le graphe G ci-contre.

Que vaut le nombre chromatique de G ? Prouvez-le.

Pourquoi considère-t-on des graphes sans boucles lorsqu'on parle de coloration de graphe ?



Exercice 4. Qu'est-ce qu'un cycle eulérien ? un chemin eulérien ? Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette un cycle eulérien. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette un chemin eulérien.

Donnez des conditions nécessaires sur les entiers strictement positifs n et k pour qu'il existe un graphe non orienté, simple (sans boucles ni arêtes multiples), régulier (tous les sommets ont même degré) ayant n sommets et kn arêtes qui admette un cycle eulérien (justifiez vos réponses).

Exercice 5. Soit l'ensemble $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On considère le graphe non orienté P défini comme suit : les sommets de P sont les paires d'éléments (distincts) de X et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si ce sont deux paires disjointes (i.e. dont l'intersection est vide). Ainsi, par exemple, $\{0,1\}$, $\{1,2\}$ et $\{2,3\}$ sont des sommets de P , il y a une arête reliant $\{0,1\}$ et $\{2,3\}$ (car $\{0,1\} \cap \{2,3\} = \emptyset$), mais pas d'arête reliant $\{0,1\}$ et $\{1,2\}$ (car $\{0,1\} \cap \{1,2\} = \{1\}$).

Déterminez le nombre de sommets, le degré des sommets, le nombre d'arêtes et le diamètre (plus grande distance entre deux sommets) du graphe P (justifiez vos réponses).

Exercice 6. Soient l'alphabet $A = \{0, 1\}$ et les mots de A^* $u = 0101$ et $v = 11111$. Que valent les mots u^2 , uv , vu ? Quelles sont les valeurs de $|u|$, $|v|$, $|u|_0$, $|v|_0$, $|u|_1$ et $|v|_1$?

Exercice 7. Soit l'alphabet $A = \{0, 1\}$. Proposez un automate fini déterministe reconnaissant les mots de A^* terminés par 01. Proposez un automate fini déterministe reconnaissant les mots de A^* terminés par 010.