

Devoir Surveillé du 27 novembre 2013,
durée 1h**Exercice 1**

On considère le programme Python suivant :

```
0  a = int(input("Entrer a: "))
1  b = int(input("Entrer b: "))
2  if a == 0 or b == 0:
3      x = 0
4  else:
5      x = 1
6  ra = a
7  rb = b
8  i = 2
9  while ra >= i and rb >= i:
10     if ra % i == 0 and rb % i == 0:
11         x = x * i
12         ra = ra // i
13         rb = rb // i
14     else:
15         i = i + 1
16  x = x * ra * rb
17  print(x)
```

Qu'affiche ce programme Python quand on entre comme valeurs :

1. a = 6 et b = 6?
2. a = 3 et b = 6?
3. a = 4 et b = 6?

Le programme affiche

1. 6 pour a = 6 et b = 6;
2. 6 pour a = 3 et b = 6;
3. 12 pour a = 4 et b = 6.

Expliquer en quelques mots ce que fait ce programme.

Ce programme calcule le plus petit multiple commun de *a* et *b*.

Exercice 2

Traduisez en Python l'algorithme NombrePremier ci-dessous. On supposera que l'on dispose pour cela d'une fonction *sqrt(n)* qui renvoie la racine carrée de l'entier *n*.

```

0  Algorithme nombrePremier
1  # cet algorithme permet de determiner si un entier naturel entre au clavier est premier
2  variables n, diviseur : entiers naturels
3      rac : reel
4  debut
5      # lecture des donnees
6      Entrer(n)
7      # initialisations
8      rac <- RacineCarree(n)    # fonction racine carree
9      diviseur <- 2
10     # boucle de recherche d'un diviseur
11     tant que n mod diviseur != 0 et diviseur <= rac faire
12         diviseur <- diviseur + 1
13     fin_tant_que
14     # affichage resultat
15     si (diviseur > rac) alors
16         Afficher("Le nombre est premier")
17     sinon
18         Afficher("Le nombre n'est pas premier")
19     fin_si
20 fin

```

```

0  import math
1  n = int(input("Entrer n: "))
2  rac = math.sqrt(n)
3  diviseur = 2
4  while n % diviseur != 0 and diviseur <= rac:
5      diviseur = diviseur + 1
6  if diviseur > rac:
7      print(n, "est premier")
8  else:
9      print(n, "n'est pas premier")

```

Exercice 3

On considère le graphe G de la figure 1.

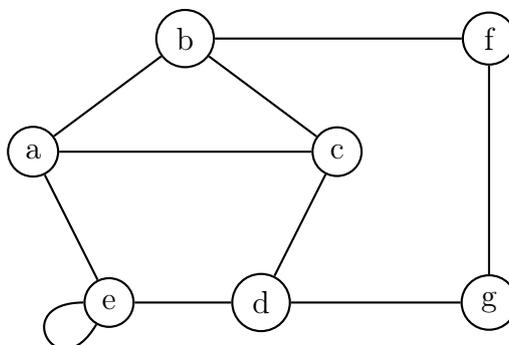


FIGURE 1 – Graphe G

1. Quel sont les degrés des sommets a et e ?

2. Quelle est la longueur d'un plus court chemin reliant a à g ?
3. Quels sont les plus courts chemins reliant a à g ?
4. Quelle est la taille maximum d'une clique de G ? d'un stable de G ?
5. Combien de couleurs faut-il au minimum pour colorier le graphe obtenu en supprimant la boucle sur le sommet e ? Justifier votre réponse. Que se passe-t-il si on laisse la boucle ?
6. Donner A , la matrice d'adjacence du graphe G , puis la représentation de G par liste d'adjacence.
7. Que représente la matrice A^2 ? Quelle sera la valeur de $A_{e,e}^2$?

1. Le sommet a est de degré 3, le sommet e de degré 4 (une boucle compte double).
2. La longueur d'un plus court chemin reliant a à g est de 3.
3. Les plus courts chemins reliant a à g sont
 - a, e, d, g ,
 - a, c, d, g ,
 - a, b, f, g .
4. La taille maximum d'une clique de G est 3 ($\{a, b, c\}$). La taille maximum d'un stable de G est également 3 ($\{a, d, f\}$ ou $\{b, e, g\}$).
5. Le nombre de couleurs minimum pour colorier le graphe obtenu en supprimant la boucle sur le sommet e est 3. Par exemple, on peut colorier 1 les sommets a, d et f , 2 les sommets b, e, g et 3 le sommet c . Cette coloration est optimale car il existe une clique de taille 3. Si on laisse la boucle sur le sommet e , le graphe n'est plus coloriable.
6. Si les sommets sont rangés dans l'ordre lexicographique, la matrice d'adjacence

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La représentation par listes d'adjacence est :

- a : b, c, e
 - b : a, c, f
 - c : a, b, d
 - d : c, e, g
 - e : a, d, e
 - f : b, g
 - g : d, f
7. La matrice A^2 représente les chaînes (pas forcément simples) de longueur 2 entre les paires de sommets. La valeur de $A_{e,e}^2$ sera 3, les chaînes étant $(e, (e, e), e, (e, e), e)$, $(e, (e, a), a, (a, e), e)$ et $(e, (e, d), d, (d, e), e)$.

Exercice 4

On rappelle que l'algorithme First-Fit consiste à colorier un par un chaque sommet d'un graphe en utilisant à chaque fois la plus petite couleur disponible (couleur non encore utilisée par un de ses voisins). Proposer deux ordres sur les sommets du graphe C_6 ci-dessous de façon à ce que :

1. la coloration obtenue par First-Fit soit optimale (utilise un nombre minimum de couleurs) ;

2. la coloration obtenue par First-Fit ne soit pas optimale.

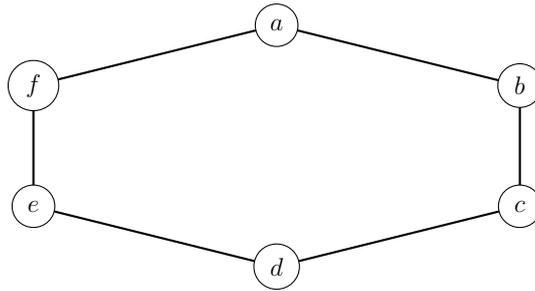


FIGURE 2 – Cycle à 6 sommets C_6

3. Pour tout graphe G , quelle relation peut-on établir entre $\chi(G)$ son nombre chromatique et $\Delta(G)$, son degré maximum, grâce à l'algorithme First-Fit ?

1. L'ordre a, b, c, d, e, f donne une coloration optimale, avec 2 couleurs utilisées.
2. L'ordre a, d, b, c, e, f donne une coloration non optimale, utilisant 3 couleurs.
3. On a toujours $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. En effet, il existe toujours une couleur entre 1 et $\Delta(G) + 1$ disponible quand on colorie un sommet à l'aide de First-Fit.

Exercice 5

Montrer que dans tout graphe simple ayant au moins deux sommets, il existe toujours deux sommets de même degré.

Si G ne possède que des sommets de degré 0, alors il possède au moins deux sommets de même degré. Sinon, il possède une composante connexe d'ordre supérieur ou égal à 2 (il faut au moins deux sommets pour avoir une arête). Soit C cette composante connexe et c son ordre. Les degrés des sommets de C sont compris entre 1 et $c - 1$ et sont au nombre de c . Donc deux sommets de C (et donc de G) au moins doivent avoir le même degré (principe des cages à pigeons).

Exercice 6

Les suites suivantes sont-elles graphiques (suites correspondant à la liste des degrés des sommets d'un graphe) ? Justifier vos réponses.

1. 4, 4, 3, 3, 2
2. 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1

1. La suite 4, 4, 3, 3, 2 est graphique et correspond au graphe de la figure 3.

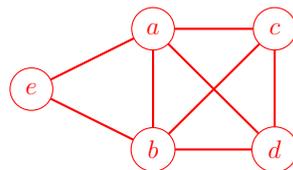


FIGURE 3 – Graphe de degrés 4,4,3,3,2

2. La suite 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1 n'est pas graphique car sa somme est 17 et la somme des degrés d'un graphe est toujours paire.

Exercice 7

Qu'est-ce qu'un cycle eulérien ? Un chemin eulérien ? Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette un cycle eulérien. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette un chemin eulérien.

Un cycle eulérien est un cycle qui passe par toutes les arêtes une et une seule fois. Un chemin eulérien est un chemin qui contient toutes les arêtes ou arcs d'un graphe une et une seule fois. Un graphe G possède un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et tous ses degrés sont pairs.

Un graphe G possède un chemin eulérien si et seulement si

1. s'il est non orienté, il est connexe, deux de ses sommets sont de degrés impairs et tous les autres sont de degré pair ;
2. s'il est orienté
 - (a) il est connexe ;
 - (b) un de ses sommets a un degré sortant égal à son degré entrant + 1 ;
 - (c) un de ses sommets a un degré sortant égal à son degré entrant - 1 ;
 - (d) tous les autres sommets ont leur degré sortant égal à leur degré entrant.

FIN.