

Algorithmes d'élection dans les arbres par calculs locaux

1 Calculs locaux sur les étoiles

On décrit l'algorithme d'élection dans les arbres anonymes par calculs locaux en utilisant des règles « génériques ». Une règle générique permet de décrire la règle de réétiquetage d'une étoile, quel que soit le degré du centre de l'étoile. En général, on considère une boule générique $(B(v_0), \lambda)$ de centre v_0 et la règle est décrite par une précondition portant sur les étiquettes présentes dans $(B(v_0), \lambda)$ et un réétiquetage $(B(v_0), \lambda')$. La règle peut être appliquée dans un graphe étiqueté $\mathbf{G} = (G, \lambda)$ sur une étoile $B_G(u)$ de centre u si la précondition est vérifiée par $B_G(u)$ et les étiquettes des sommets de $B_G(u)$ sont alors modifiées en fonction du réétiquetage λ' . En général, on ne mentionne pas dans le réétiquetage les étiquettes des sommets qui ne sont pas modifiées.

L'algorithme est décrit par les deux règles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 présentées ci-dessous. Cet algorithme est un algorithme d'élection pour les arbres où tous les sommets sont initialement étiquetés A .

\mathcal{E}_1 : Règle d'Élagage

Précondition :

- $\lambda(v_0) = A$,
- $\exists! v \in V(B(v_0)) \setminus \{v_0\}$ tel que $\lambda(v) = A$.

Réétiquetage :

- $\lambda'(v_0) := \text{NON-ÉLU}$.

\mathcal{E}_2 : Règle d'Élection

Précondition :

- $\lambda(v_0) = A$,
- $\nexists v \in V(B(v_0)) \setminus \{v_0\}$ tel que $\lambda(v) = A$.

Réétiquetage :

- $\lambda'(v_0) := \text{ÉLU}$.

La règle \mathcal{E}_1 peut être appliquée dans un graphe \mathbf{G} sur une étoile $B_G(u)$ de centre u si l'étiquette de u est A et si u a un unique voisin étiqueté A . Lorsque cette règle est appliquée, seule l'étiquette de u est modifiée et devient NON-ÉLU.

La règle \mathcal{E}_2 peut être appliquée dans un graphe \mathbf{G} sur une étoile $B_G(u)$ de centre u si l'étiquette de u est A et si u n'a aucun voisin étiqueté A . Lorsque cette règle est appliquée, seule l'étiquette de u est modifiée et devient ÉLU.

Une exécution de cet algorithme est présentée sur la Figure 1. On va montrer que pour tout arbre $\mathbf{T} = (T, \lambda)$ où tous les sommets sont étiquetés A (i.e., $\forall v \in V(T), \lambda(v) = A$), toute exécution de l'algorithme décrit par les règles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 permet de résoudre l'élection dans \mathbf{T} .

On considère un arbre \mathbf{T} et une exécution de l'algorithme décrit précédemment sur \mathbf{T} . Pour chaque étape i de l'exécution, on note $\lambda(v)$ l'étiquette du sommet v après le i ème pas de réétiquetage.

On observe qu'à chaque application d'une des deux règles, le nombre de sommets qui n'ont pas d'étiquettes finales diminue strictement. On est donc assuré que toute exécution de l'algorithme termine. On montre dans le lemme suivant un invariant qui permet de prouver la correction de l'algorithme.

Lemma 1. *Pour toute étape i , le graphe induit par l'ensemble des sommets étiquetés A est un arbre et s'il existe un sommet étiqueté A alors aucun sommet n'a l'étiquette ÉLU.*

Démonstration. On montre ce lemme par récurrence sur i . Initialement, tous les sommets sont étiquetés A et puisque \mathbf{T} est un arbre, la propriété est bien vérifiée. On suppose que la propriété est vérifiée à l'étape i .

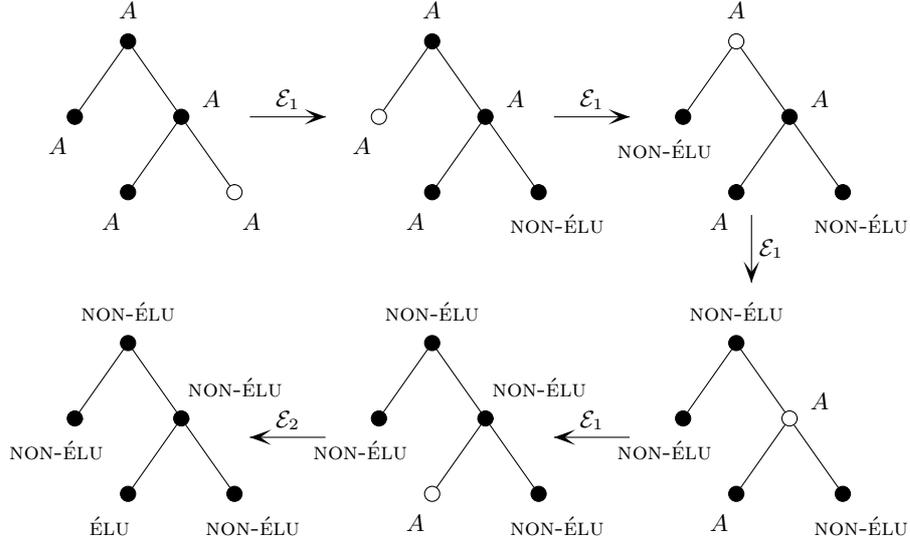


Fig. 1. Une exécution de l'algorithme décrit par les règles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . Pour chaque configuration, le centre de l'étoile sur laquelle est appliquée la règle \mathcal{E}_i pour passer à la configuration suivante est le sommet blanc.

Si la règle \mathcal{E}_1 est appliquée à l'étape $i + 1$ sur l'étoile $B_T(v)$ de centre v , alors v est une feuille de l'arbre induit par les sommets étiquetés A à l'étape i . Par conséquent, à l'étape $i + 1$, le graphe induit par les sommets étiquetés A est toujours un arbre et aucun sommet n'a l'étiquette ÉLU.

Si la règle \mathcal{E}_2 est appliquée à l'étape $i + 1$ sur l'étoile $B_T(v)$ de centre v , cela signifie que v n'a aucun voisin étiqueté A et par conséquent, l'arbre induit par les sommets étiquetés A à l'étape i ne contient que le sommet v . À l'étape $i + 1$, il n'y a aucun sommet étiqueté A et la propriété est vraie.

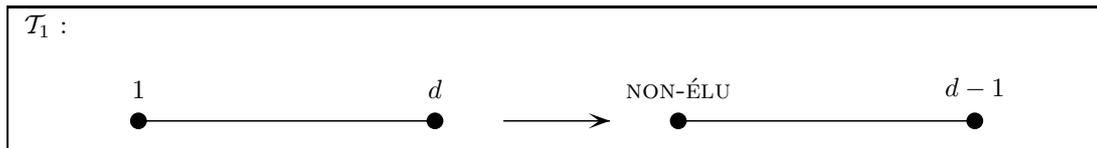
On considère la configuration finale d'une exécution de l'algorithme sur \mathbf{T} . S'il existe encore des sommets étiquetés A , alors d'après le Lemme 1, le graphe induit par les sommets étiquetés A est un arbre et ou bien, cet arbre est réduit à un sommet v et la règle \mathcal{E}_2 peut être appliquée sur l'étoile $B_T(v)$ de centre v , ou bien il existe un sommet v qui est une feuille dans cet arbre et la règle \mathcal{T}_1 peut être appliquée sur l'étoile $B_T(v)$ de centre v . Par conséquent, dans la configuration finale, tous les sommets ont l'étiquette ÉLU ou NON-ÉLU. De plus, puisqu'à chaque étape, l'étiquette d'un seul sommet est modifiée, le dernier sommet qui a changé d'étiquette a nécessairement pris l'étiquette ÉLU, et d'après le Lemme 1, les autres sommets ont l'étiquette NON-ÉLU.

L'algorithme décrit par les règles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 permet donc de résoudre le problème de l'élection dans la famille des arbres.

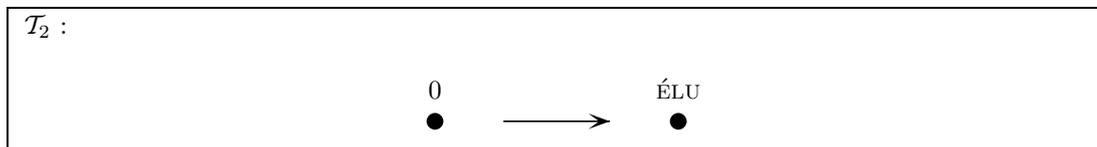
2 Calculs locaux sur les arêtes

Si on suppose que chaque sommet est initialement étiqueté par son degré, il est aisé de se convaincre que l'algorithme suivant permet d'élire dans les arbres. Dans cet algorithme, un pas de calcul n'implique pas un sommet et tous ses voisins, mais seulement deux sommets voisins.

La première règle est une règle « d'élagage » qui permet à un sommet qui n'a qu'un seul voisin actif (i.e. dont l'étiquette n'est pas terminale) dans l'arbre de prendre l'étiquette NON-ÉLU et d'informer son voisin qu'il a un voisin actif de moins.



La seconde règle permet à un sommet qui n'a plus aucun voisin actif dans l'arbre de prendre l'étiquette ÉLU.



La preuve de l'algorithme est la même que précédemment, en ajoutant comme invariant que l'étiquette d'un sommet est son nombre de voisins « actifs » (dont l'étiquette n'est pas ÉLU ou NON-ÉLU).