Exercice 1

Correction de l'exercice 1

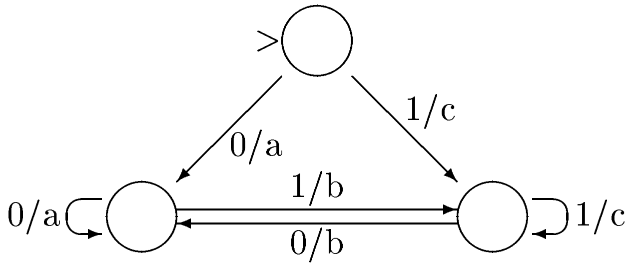

Figure 1: 0 (resp. 1) par b si précédé de 1 (resp. 0), par a (resp. c) sinon.

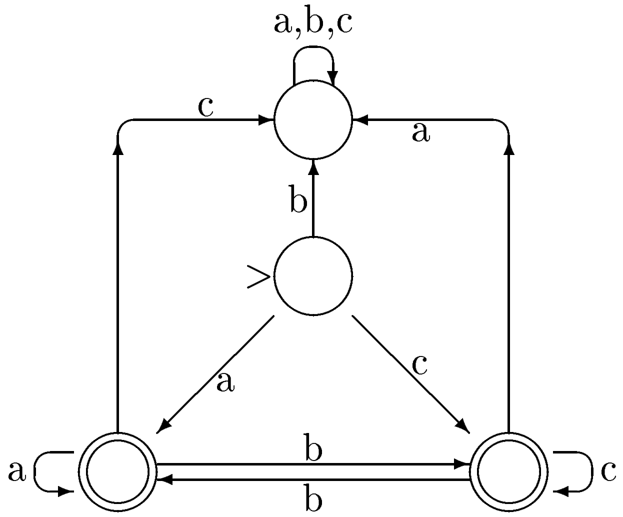

Figure 2: 0 (resp. 1) par b si précédé de 1 (resp. 0), par a (resp. c) sinon : **dét. et complet**

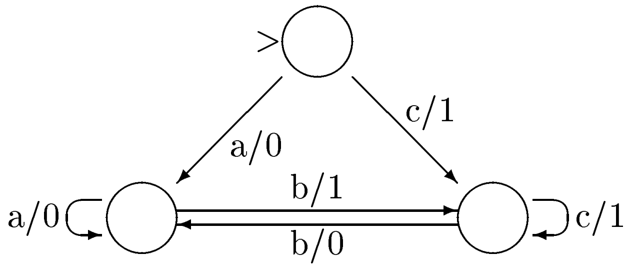

Figure 3: 0 (resp. 1) par b si précédé de 1 (resp. 0), par a (resp. c) sinon : **inverse**

Exercice 2

Correction de l'exercice 2

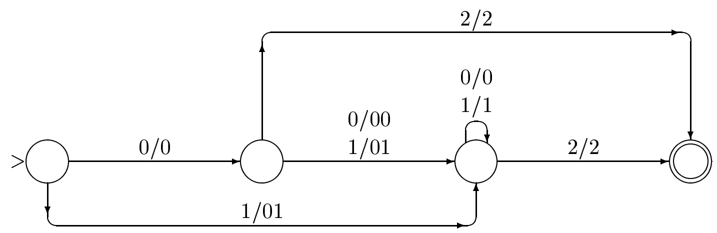

Figure 4: Multiplication par 2

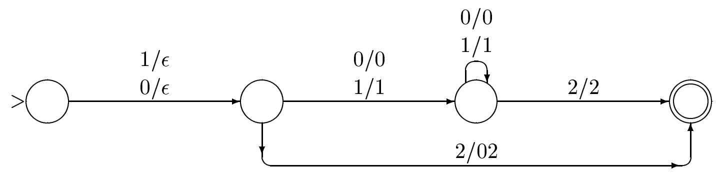

Figure 5: Quotient entier par 2

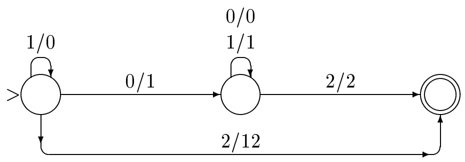

Figure 6: Ajout de 1

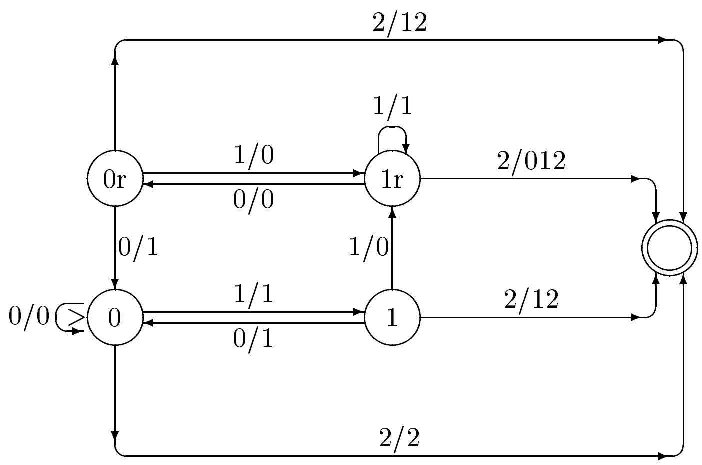

Figure 7: Multiplication par 3

Exercice 3

Correction de l'exercice 3

1.

$$\begin{aligned} d(f,g) &= |f| + |g| - 2|f \wedge g| \\ &= |f \wedge g| + |u_1| + |f \wedge g| + |u_2| - 2|f \wedge g| \\ &= |u_1| + |u_2| \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} d(f,g) = 0 &\iff |u_1| + |u_2| = 0 \\ &\iff \begin{cases} |u_1| = 0 \\ |u_2| = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f = f \wedge g \\ g = f \wedge g \end{cases} \\ &\iff f = g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f,g) &= |f| + |g| - 2|f \wedge g| \\ &= d(g,f) \end{aligned}$$

3. Nous montrons d'abord la propriété :

$$(f \wedge g = f \wedge h) \;\text{ ou bien } (f \wedge g = g \wedge h) \;\text{ ou bien } (f \wedge h = g \wedge h)$$

$$\begin{cases} f = (f \wedge g \wedge h) f_1 f_2 \text{ avec } f_1 \text{ une lettre} \\ g = (f \wedge g \wedge h) g_1 g_2 \text{ avec } g_1 \text{ une lettre} \\ h = (f \wedge g \wedge h) h_1 h_2 \text{ avec } h_1 \text{ une lettre} \end{cases} \implies f_1 \neq g_1 \;\text{ ou } f_1 \neq h_1 \;\text{ ou } g_1 \neq h_1$$

$$\implies \quad \text{au plus deux parmies } f_1, g_1, h_1 \;\text{ sont égales.}$$

Supposons $f_1 = g_1$

$$\begin{aligned} f_1 = g_1 &\implies \begin{cases} f_1 \neq h1 \\ g_1 \neq h1 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} (f \wedge h) = (f \wedge g \wedge h) \\ (g \wedge h) = (f \wedge g \wedge h) \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux autres cas se traitent de manière identique, ce qui démontre notre propriété.

Nous pouvons maintenant répondre à la question en étudiant les trois cas.

-

$$\begin{aligned} (f \wedge g = f \wedge h) &\implies |f \wedge h| = |f \wedge g| \\ &\implies |f \wedge h| + |g \wedge h| \leq |h| + |f \wedge g| \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(f\wedge g = g\wedge h) &\Longrightarrow |g\wedge h| = |f\wedge g|\\ &\Longrightarrow |f\wedge h| + |g\wedge h| \leq |h| + |f\wedge g|\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\begin{cases}0\leq d(h, f\wedge g)\\ f\wedge h = g\wedge h = f\wedge g\wedge h\end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases}0\leq |h| + |f\wedge g| - 2|f\wedge g\wedge h|\\ |g\wedge h| = |f\wedge g| = |f\wedge g\wedge h|\end{cases}\\ &\Longrightarrow \begin{cases}2|f\wedge g\wedge h| \leq |h| + |f\wedge g|\\ |g\wedge h| = |f\wedge g| = |f\wedge g\wedge h|\end{cases}\\ &\Longrightarrow |f\wedge h| + |g\wedge h| \leq |h| + |f\wedge g|\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}d(\alpha(f),\alpha(g)) &= |\alpha(f)| + |\alpha(g)| - 2|\alpha(f)\wedge\alpha(g)\\ &\leq |\alpha(f)| + |\alpha(g)| - 2|\alpha(f\wedge g)|\\ &\leq (|\alpha(f)| - |\alpha(f\wedge g)|) + (|\alpha(g)| - |\alpha(f\wedge g)|)\\ &\leq |\alpha(u_1)| + |\alpha(u_2)|\\ &\leq M|u_1| + M|u_2|\\ &\leq M\times d(f,g)\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\begin{cases}f \text{ tel que } |f| = 2n\\ g = fa\end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases}\beta(f) = 0^{|f|}\\ \beta(g) = 1^{|f|+1}\end{cases}\\ &\Longrightarrow \begin{cases}d(\beta(f),\beta(g)) = 2|f| + 1\\ d(f,g) = 1\end{cases}\\ &\Longrightarrow d(\beta(f),\beta(g)) = (4n+1)\times d(f,g)\\ &\Longrightarrow \forall M, \exists (f,g)\ \text{ tel que } d(\beta(f),\beta(g) \geq M\times d(f,g)\\ &\Longrightarrow \beta \text{ n'est pas séquentielle.}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}d(\alpha(f),\alpha(g)) &= |\alpha(f)| + |\alpha(g)| - 2|\alpha(f)\wedge\alpha(g)\\ &\leq |\alpha(f)| + |\alpha(g)| - 2|\alpha(f\wedge g)|\\ &\leq (|\alpha(f)| - |\alpha(f\wedge g)|) + (|\alpha(g)| - |\alpha(f\wedge g)|)\\ &\leq |\alpha(u_1)| + |\alpha(u_2)|\\ &\leq M|u_1| + N + M|u_2| + N\\ &\leq M\times d(f,g) + 2N\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} f \text{ tel que } |f| = 2n \\ g = fa \end{cases} \quad &\Longrightarrow \begin{cases} \beta(f) = 0^{|f|} \\ \beta(g) = 1^{|f|+1} \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} d(\beta(f), \beta(g)) = 2|f| + 1 \\ d(f, g) = 1 \end{cases} \\
&\Longrightarrow d(\beta(f), \beta(g)) = (4n+1) \times d(f, g) \\
&\Longrightarrow \forall (M, N), \exists (f, g) \;\text{ tel que } d(\beta(f), \beta(g) \geq M \times d(f, g) + 2N \\
&\Longrightarrow \beta \text{ n'est pas séquentielle avec marqueur.}
\end{aligned}$$