Université Bordeaux I
U.F.R. Mathématiques et Informatique

Licence Informatique semestre 6
Année 2004-2005

Lundi 25 avril 2005, (1 heure)
Sans document

Alain Griffault

Nom :

Prénom :

Exercice 1 (4 points) *Le graphe réduit d'un graphe orienté $G = (S, A)$ est noté $G^{CFC} = (S^{CFC}, A^{CFC})$, où S^{CFC} contient un sommet pour chaque composante fortement connexe de G et A^{CFC} contient l'arc (u, v) s'il existe un arc entre un sommet de la composante fortement connexe de G correspondant à u vers un sommet de la composante fortement connexe de G correspondant à v.*
Nous avons montré en TD que le graphe G^{CFC} est un graphe orienté acyclique.

Soit $G_a = (S_a, A_a)$ un graphe défini par $S_a = S$ et $A_a = A \cup \{a\}$.
Pour chacune des affirmations suivantes, donner une preuve ou un contre-exemple.

Question 1.1 *Le graphe $G_a^{CFC} = (S_a^{CFC}, A_a^{CFC})$ peut avoir un cycle.*

Question 1.2 *Le cardinal de S_a^{CFC} peut être strictement supérieur au cardinal de S^{CFC}.*

Question 1.3 *Le cardinal de A^{CFC} peut être égal à un entier $k > 0$ avec k non borné, et le cardinal de A_a^{CFC} être égal à 0.*

Exercice 2 (4 points) *Démontrer ou contredire l'affirmation suivante : si un graphe orienté* `G` *contient des circuits, alors* `TriTopologique(G)` *fournit un ordre* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *des sommets qui minimise le nombre d'arcs* (u_i, u_j) *avec* $i > j$.

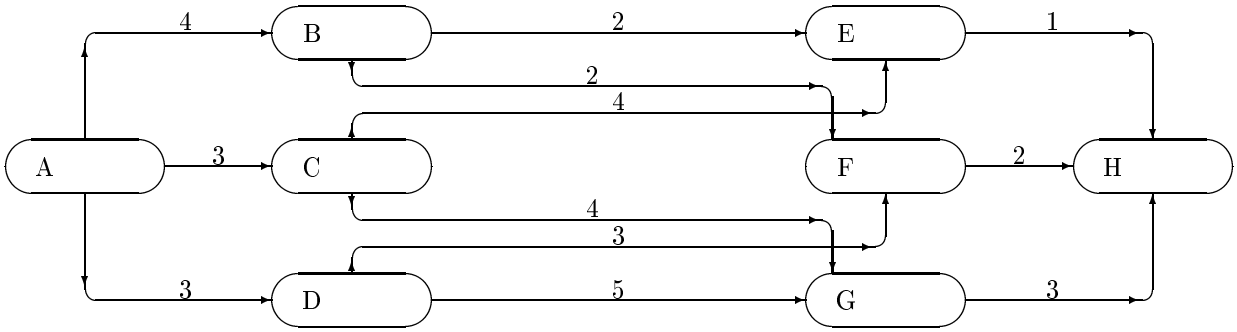
Exercice 3 (4 points) *Soit* $G = (S, A)$ *un graphe non orienté et une fonction de pondération* $r(u, v)$.
Une coupure C *du graphe est la partition de* S *en* $(C, S - C)$. *Cela défini :*
– *les arêtes traversant une coupure* $A_C = \{(u, v) \in A, u \in C, v \in S - C\}$,
– *la valeur minimale de la coupure* $min(A_C) = min\{r(u, v), (u, v) \in A_C\}$. *et*
– *les arêtes minimales traversant une coupure* $A_C^{min} = \{(u, v) \in A_C, r(u, v) = min(A_C)\}$.

Question 3.1 *Montrer que si pour chaque coupure du graphe, il existe une arête minimale unique traversant cette coupure, alors le graphe possède un arbre couvrant minimal unique.*

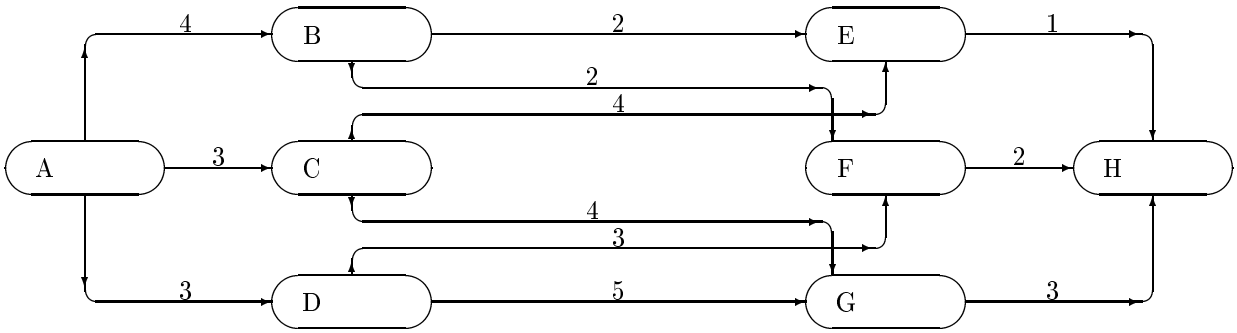
Question 3.2 *Montrer que la réciproque est fausse en donnant un contre-exemple.*

Exercice 4 (4 points) *Soit un graphe orienté $G = (S, A)$ pour lequel chaque arc $(u, v) \in A$ possède une valeur $r(u, v)$ réelle vérifiant $0 \leq r(u, v) \leq 1$. Cette valeur représente la fiabilité du canal de communication entre le sommet u et le sommet v. On interprète $r(u, v)$ comme la probabilité pour que le canal entre u et v ne soit pas interrompu, et on suppose que ces probabilités sont indépendantes. En vous inspirant très fortement d'un algorithme vu en cours, donner un algorithme efficace permettant de trouver le chemin le plus fiable entre un sommet s et tous les autres sommets.*

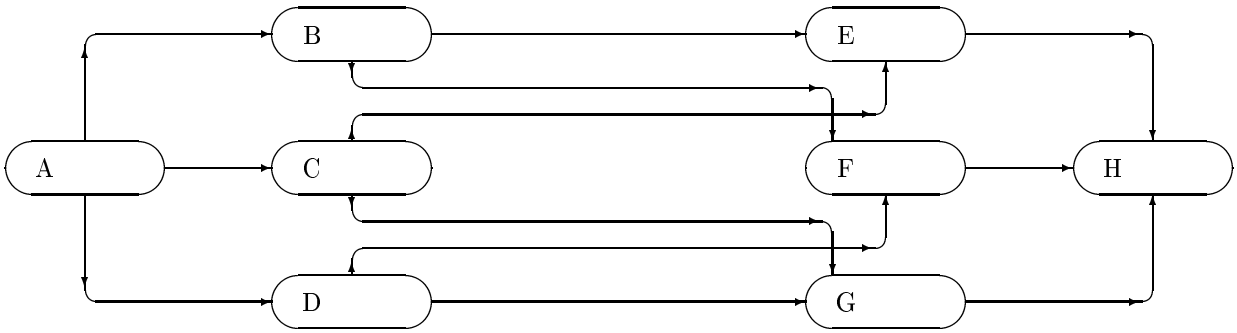
Exercice 5 (4 points) *Soit le graphe $G = (S, A)$ orienté et sa fonction de pondération $r(u, v)$ à valeur entière représentés par la figure suivante.*



Question 5.1 *Dessiner le résultat de l'algorithme des plus courts chemins de Dijkstra à partir du sommet A. Vous préciserez les distances pour chaque sommet et l'arbre des plus courts chemins.*



Question 5.2 *Dessiner un graphe $G' = (S', A')$ avec $S' = S$, $A' = A$ et $r'(u, v) \geq r(u, v)$ tel que :*
- *Le résultat de l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A soit inchangé.*
- *Un arbre couvrant calculé par un algorithme que vous préciserez soit identique à l'arbre des plus courts chemins.*
- *Le poids de l'arbre G' soit minimal pour cet algorithme.*



Algorithme utilisé :