Université Bordeaux I
U.F.R. Mathématiques et Informatique

Licence Informatique semestre 6
Année 2004-2005

Lundi 25 avril 2005, (1 heure)
Sans document

Alain Griffault

SUJET + CORRIGE

Exercice 1 (4 points) *Le graphe réduit d'un graphe orienté $G = (S, A)$ est noté $G^{CFC} = (S^{CFC}, A^{CFC})$, où S^{CFC} contient un sommet pour chaque composante fortement connexe de G et A^{CFC} contient l'arc (u, v) s'il existe un arc entre un sommet de la composante fortement connexe de G correspondant à u vers un sommet de la composante fortement connexe de G correspondant à v.*
Nous avons montré en TD que le graphe G^{CFC} est un graphe orienté acyclique.

Soit $G_a = (S_a, A_a)$ un graphe défini par $S_a = S$ et $A_a = A \cup \{a\}$.
Pour chacune des affirmations suivantes, donner une preuve ou un contre-exemple.

Question 1.1 *Le graphe $G_a^{CFC} = (S_a^{CFC}, A_a^{CFC})$ peut avoir un cycle.*
Réponse : *Faux.*

Le graphe réduit est toujours acyclique (démontré en TD et rappelé dans le sujet).

Question 1.2 *Le cardinal de S_a^{CFC} peut être strictement supérieur au cardinal de S^{CFC}.*
Réponse : *Faux.*

L'ajout d'un arc dans G diminue où laisse invariant le nombre de composantes fortement connexes de G. Le cardinal de S_a^{CFC} est donc inférieur où égal au cardinal de S^{CFC}.

Question 1.3 *Le cardinal de A^{CFC} peut être égal à un entier $k > 0$ avec k non borné, et le cardinal de A_a^{CFC} être égal à 0.*
Réponse : *Vrai.*

Il suffit de poser $S = \{i \in N, i \leq k\}$, $A = \{(i, i+1), i \in S, (i+1) \in S\}$ et $a = (k, 0)$.

Exercice 2 (4 points) *Démontrer ou contredire l'affirmation suivante : si un graphe orienté* `G` *contient des circuits, alors* `TriTopologique(G)` *fournit un ordre $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des sommets qui minimise le nombre d'arcs (u_i, u_j) avec $i > j$.*
Réponse : *L'affirmation est fausse.*

Soit le graphe $G(S, A)$ avec $S = \{1, 2, 3\}$ et $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$.
On suppose que les listes d'adjacences respectent l'ordre des entiers.

`TriTopologique(G)` *va fournir l'ordre $O_S : 1 < 2 < 3$.*
Les arcs qui ne respectent pas l'ordre sont au nombre de trois : $\{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$.

Pour ce graphe, les ordres qui minimisent les mauvais *arcs sont les ordres $O_S^1 : 3 < 2 < 1$ et $O_S^2 : 2 < 3 < 1$.*
En effet, les arcs qui ne respectent pas ces ordres sont au nombre de deux : $\{(1, 2), (2, 3)\}$ et $\{(1, 2), (3, 2)\}$.

Exercice 3 (4 points) *Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté et une fonction de pondération $r(u, v)$.*
Une coupure C du graphe est la partition de S en $(C, S - C)$. Cela défini :
– les arêtes traversant une coupure $A_C = \{(u, v) \in A, u \in C, v \in S - C\}$,
– la valeur minimale de la coupure $min(A_C) = min\{r(u, v), (u, v) \in A_C\}$. et
– les arêtes minimales traversant une coupure $A_C^{min} = \{(u, v) \in A_C, r(u, v) = min(A_C)\}$.

Question 3.1 *Montrer que si pour chaque coupure du graphe, il existe une arête minimale unique traversant cette coupure, alors le graphe possède un arbre couvrant minimal unique.*
Réponse : *Notons $P1$:* "pour chaque coupure du graphe, il existe une arête minimale unique traversant cette coupure." *; $P2$:* "toutes les arêtes d'un arbre couvrant minimal ont des poids différents." *et $P3$:* "le graphe possède un arbre couvrant minimal unique."

Montrons que : $P1 \Rightarrow P2$

Soit $T = (S, A_T)$ un arbre couvrant minimal. Soient $(u_1, u_2), (u_3, u_4)$ deux arêtes de même poids p dans T.
Supposons que u_2 et u_4 soient les deux sommets réliés par un chemin dans T (il y en a obligatoirement une paire). Posons C_1 l'ensemble des sommets connectés à u_1 dans T sans passer par le sommet u_2. Posons C_3 l'ensemble des sommets connectés à u_3 dans T sans passer par le sommet u_4. Posons C_2 l'ensemble des sommets connectés à u_2 dans T sans passer par les sommets u_1 et u_3.
Considérons la coupure $(C_2, S - C_2)$. D'après $P1$, elle possède une arête minimale unique de poids r. Nous avons donc $r < p$, et cette arête relie C_2 soit à C_1, soit à C_3. Nous pouvons donc remplacer dans l'arbre T une des deux arêtes de poids p par cette arête de poids r, pour obtenir un arbre de moindre poids, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
D'où la propriété $P1 \Rightarrow P2$.

Montrons que : $P1, P2 \Rightarrow P3$

Soient $T^1 = (S, A^1)$ et $T^2 = (S, A^2)$ deux arbres couvrants minimaux. Notons (u_i^1, u_{i+1}^1) les arêtes de T^1 ordonnées strictement suivant le poids. Notons (u_i^2, u_{i+1}^2) les arêtes de T^2 ordonnées strictement suivant le poids. D'après la propriété précédente, toutes leurs arêtes ont des poids différents. Soient $(u_j^1, u_{j+1}^1) \in T^1$ et $(u_j^2, u_{j+1}^2) \in T^2$ les arêtes de poids minimal p qui diffèrent.
Considérons le graphe $T^1 \cup \{(u_j^2, u_{j+1}^2)\}$. Ce graphe contient un cycle. Si une arête de ce cycle est de poids supérieur à p, on peut construite un arbre T' couvrant de poids inférieur à celui de T^1. C'est donc impossible. Toutes les arêtes de T^1 appartenant à ce cycle ont donc un poids inférieur à p, ce sont donc toutes des arêtes de T^2. L'ajoût de (u_j^2, u_{j+1}^2) provoque donc un cycle dans T^2, ce qui est impossible car T^2 est un arbre.
D'où la propriété $P1, P2 \Rightarrow P3$.

Nous avons donc montré que si pour chaque coupure du graphe, il existe une arête minimale unique traversant cette coupure, alors le graphe possède un arbre couvrant minimal unique.

Question 3.2 *Montrer que la réciproque est fausse en donnant un contre-exemple.*
Réponse : *$G = \{(A, 1, B), (B, 1, C), (C, 2, A)\}$.*

L'arbre couvrant minimal $T = \{(A, 1, B), (B, 1, C)\}$ est unique, mais la coupure $(\{A, C\}, \{B\})$ possède deux arêtes de poids minimal la traversant : $(A, 1, B)$ et $(B, 1, C)$.

Exercice 4 (4 points) *Soit un graphe orienté $G = (S, A)$ pour lequel chaque arc $(u, v) \in A$ possède une valeur $r(u, v)$ réelle vérifiant $0 \leq r(u, v) \leq 1$. Cette valeur représente la fiabilité du canal de communication entre le sommet u et le sommet v. On interprète $r(u, v)$ comme la probabilité pour que le canal entre u et v ne soit pas interrompu, et on suppose que ces probabilités sont indépendantes. En vous inspirant très fortement d'un algorithme vu en cours, donner un algorithme efficace permettant de trouver le chemin le plus fiable entre un sommet s et tous les autres sommets.*

Réponse : *Il suffit de prendre l'algorithme de Dijkstra en remplaçant les deux fonctions d'initialisation et de relâchement par les suivantes :*

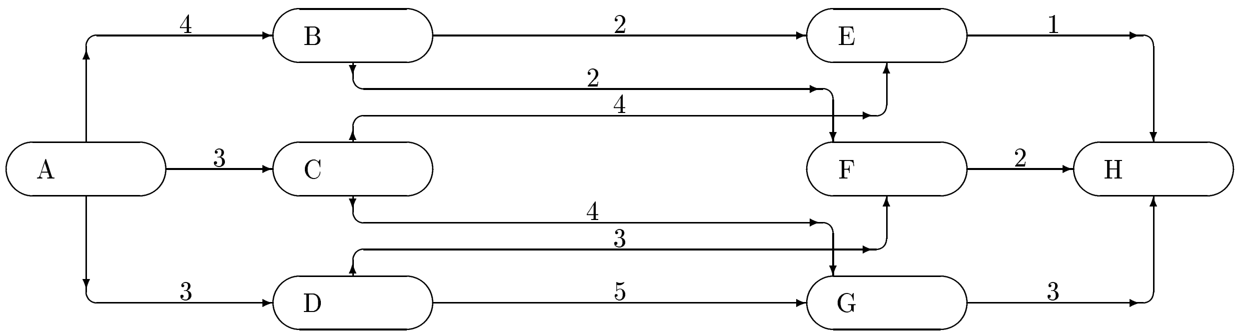
```
SourceUniqueInitialisation(G,s) {
    pour chaque sommet u de S(G) {
        d[u] = 0;  // infini pour les plus courts chemins
        pi[u] = nil;
    }
    d[s] = 1;   // 0 pour les plus courts chemins
}

Relacher(u,v,r) {
    si (d[v] < d[u] * r(u,v)) { // (>,+) pour les plus courts chemins
        d[v] = d[u] * r(u,v);
        pi[v] = u;
    }
}

CheminLePlusFiable(G,r,s) { // idem Dijkstra
    SourceUniqueInitialisation(G,s);
    E = ensembleVide;
    F = S(G);
    tant que (F != vide) {
        u = ExtraireMaximum(F); // ExtraireMinimum pour plus courts chemins
        E = E union {u};
        pour chaque sommet v element de Adj(u)
            Relacher(u,v,r);
   }
}
```

Attention : il ne faut pas confondre avec un calcul de poids maximal pour lequel ce type de modification n'est pas correct. Cette modification est correcte car on multiplie des réels compris entre 0 et 1.

Cette remarque mène à une seconde solution :

- *Ne pas modifier l'algorithme des plus courts chemins de Dijkstra.*
- *Remplacer les valeurs $r(u, v)$ par $ln(\frac{1}{r(u,v)})$.*
  On utilise ainsi le fait que l'algorithme va minimiser $ln(\frac{1}{a}) + ln(\frac{1}{b}) = ln(\frac{1}{a*b})$.

Exercice 5 (4 points) *Soit le graphe $G = (S, A)$ orienté et sa fonction de pondération $r(u, v)$ à valeur entière représentés par la figure suivante.*



Question 5.1 *Dessiner le résultat de l'algorithme des plus courts chemins de Dijkstra à partir du sommet A. Vous préciserez les distances pour chaque sommet et l'arbre des plus courts chemins.*
Réponse :

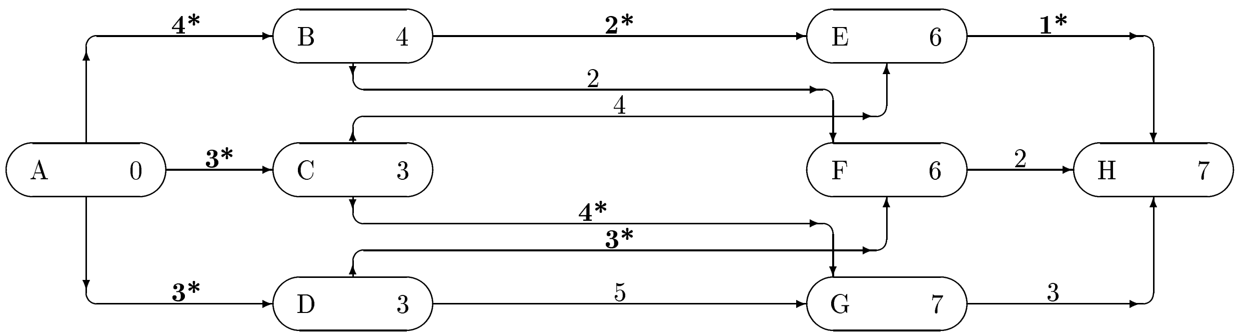


FIG. *1 – Arbre des plus courts chemins à partir de A*

Question 5.2 *Dessiner un graphe $G' = (S', A')$ avec $S' = S$, $A' = A$ et $r'(u, v) \geq r(u, v)$ tel que :*
– *Le résultat de l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet A soit inchangé.*
– *Un arbre couvrant calculé par un algorithme que vous préciserez soit identique à l'arbre des plus courts chemins.*
– *Le poids de l'arbre G' soit minimal pour cet algorithme.*

Réponse : *Il y a eu beaucoup d'interprétations différentes pour cette question. Voici une solution correspond à une interprétation.*

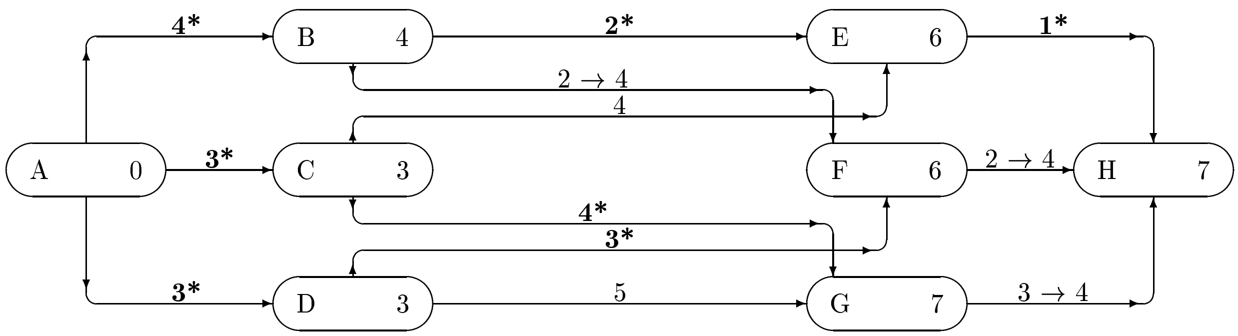


FIG. *2 – Arbre des plus courts chemins et arbre de Kruskal coïncident*