Programmation Fonctionnelle et Symbolique : feuille 2

Fonctionnelles

Exercice 2.1 *Première fonctionnelle*

1. Écrire la fonction qui, étant donnée une fonction f passée en paramètre, renvoie $f(1)$.
2. L'appliquer à $f(x) = 3x^2 + 4.7$.

Exercice 2.2

1. Écrire la fonction `sigma (f n p)` qui calcule $\sum_{i=n}^{p} f(i)$, pour une fonction $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$.
2. Tester votre fonction avec des fonctions nommées et des fonctions anonymes.

Exercice 2.3

1. Écrire la fonction qui, étant donnée une valeur n, construit la fonction qui multiplie un nombre par n.
2. Définir la fonction qui double son argument.

Exercice 2.4

1. Écrire la fonction qui donne une approximation de la dérivée.
2. Généraliser aux dérivées n-ièmes en utilisant la fonction précédente.
3. Vous devriez remarquer que l'application répétitive de l'approximation de la dérivée n'est pas un algorithme efficace pour trouver la n-ième dérivée. En utilisant les formules suivantes :
$$F''(x) = \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$
$$F^{(3)}(x) = \frac{-F(x-2h) + 2F(x-h) - 2F(x+h) + F(x+2h)}{2h^3} + O(h^2)$$
écrire la fonction qui donne une approximation de la première à la troisième dérivée. Comparer les résultats avec ceux de la dernière fonction.

Exercice 2.5 *Généralisation de l'exercice 2.2*

1. Écrire $\mathrm{OP}_{i=n}^{p} f(i)$, pour une fonction $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ et une opération OP binaire quelconque.
Faire une version récursive (une version itérative sera envisagée dans une prochaine feuille).
2. Définir la fonction factorielle à l'aide de la fonction précédente.

3. Définir une fonction qui approxime e en utilisant le fait que :

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \sum_{i=1}^{n} 1/i!) = e.$$

4. On complique un peu : Écrire une fonction permettant de calculer la somme $\Sigma_{i=0}^{p} f(i)x^i/i!$ (*On rappelle que* $x^0 = 0! = 1$)
5. Application : utiliser la fonction précédente pour calculer une valeur approchée de $\cos x$ en utilisant la formule :

$$1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! \ldots + (-1)^p x^{2p}/(2p)!$$

Exercice 2.6

Soient f et g deux fonctions définies sur les entiers et à valeur numérique. On définit le produit de f et g par

$$(f \otimes g)(n) = f(0)g(n) + f(1)g(n-1) + \ldots f(n)g(0)$$

1. Définir une fonction `produit (f g n)`, qui calcule $(f \otimes g)(n)$.
2. Donner un exemple d'utilisation de la fonctionnelle suivante ?

```
(defun produit-fun (f g)
  (lambda (n) (produit f g n)))
```

3. Pourquoi se limiter à l'addition et à la multiplication dans la partie droite de la formule de $f \otimes g$?