

Jeux, Synthèse et Contrôle

Opérations sur les jeux

Exercice 4.1 Jeux de “trinité”

On considère un jeu “colorié” \mathcal{J} , à 2 joueurs, à somme nulle :

$$\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, \Omega \rangle$$

où $\Omega : V \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction de coloriage (on suppose que $\text{Im}(\Omega)$ est finie). On note r la fonction de gain du joueur 0. Pour une partie $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on pose

$$c(w) := \max\{c \in \mathbb{N} \mid (\Omega(w_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ passe i.s. par } c\}$$

et

$$r(w) := 1 \text{ si } c(w) \equiv 0 \pmod{3}, \quad r(w) := -1 \text{ si } c(w) \equiv 1 \pmod{3}, \quad r(w) := 0 \text{ si } c(w) \equiv 2 \pmod{3}.$$

1- Montrer que, pour tout sommet $v \in V$, le jeu (\mathcal{J}, v) vérifie la propriété *minimax* i.e. :

$$\max_{\sigma \in S_0} (\min_{\tau \in S_1} r(\sigma, \tau)) = \min_{\tau \in S_1} (\max_{\sigma \in S_0} r(\sigma, \tau)).$$

2- Montrer que, pour tout $v \in V$, la valeur du jeu (\mathcal{J}, v) est réalisée par une stratégie optimale σ_0 (resp. τ_1) de J0 (resp. J1) qui est une *stratégie de position*.

3- Montrer que, si \mathcal{J} est fini, on peut calculer la valeur de (\mathcal{J}, v) et des stratégies de positions optimales de chacun des joueurs.

Exercice 4.2 Élimination de sommets dominés.

On considère un jeu \mathcal{J} , à 2 joueurs, de longueur ω :

$$\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$$

Soit $v \in V_1$ tel que

$$\forall u \in V_0, (u, v) \in E \Rightarrow [\exists v' \in V_1, (u, v') \in E \text{ et } v'E \subseteq vE].$$

On note $\mathcal{J} - \{v\}$ le jeu

$$\langle V_0, V_1 \setminus \{v\}, E', W \rangle$$

avec $E' := E \cap (V_0 \times V_1 \setminus \{v\}) \cup E \cap (V_1 \setminus \{v\} \times V_0)$.

1- Montrer que, pour tout $v_0 \in V_0$, J0 a une stratégie gagnante dans (\mathcal{J}, v_0) ssi J0 a une stratégie gagnante dans $(\mathcal{J} - \{v\}, v_0)$.

2- Montrer que, pour tout $v_0 \in V_0$, J1 a une stratégie gagnante dans (\mathcal{J}, v_0) ssi J1 a une stratégie gagnante dans $(\mathcal{J} - \{v\}, v_0)$.

Exercice 4.3 Dual du retournement du dual du retournement.

On considère un jeu \mathcal{J} , arborescent, de longueur finie. On compare les jeux $D(R_s(D(R_s(\mathcal{J}))))$ et \mathcal{J} .

1- Peut-on utiliser la transformation de l'exercice 4.2 pour passer de l'un à l'autre ?

2- Soit $v_0 \in V_0$. Les deux jeux ont-ils le même gagnant en partant de v_0 ?

3- Reprendre les questions 1,2, dans le cas d'un jeu de longueur ω .

Exercice 4.4 Jeu minimal.

Soient $\mathcal{J}^1 = \langle V_0^1, V_1^1, E^1, \Omega^1 \rangle$ et $\mathcal{J}^2 = \langle V_0^2, V_1^2, E^2, \Omega^2 \rangle$ des jeux de parité. Notons $V^i := V_0^i \cup V_1^i$ (pour $i \in \{1, 2\}$) l'ensemble des sommets du jeu \mathcal{J}^i .

On appelle *bisimulation* du jeu de parité \mathcal{J}^1 par le jeu de parité \mathcal{J}^2 , toute relation binaire $R \subseteq V^0 \times V^1$ vérifiant :

(1) $\text{Dom}(R) = V^1$

(1') $\text{Im}(R) = V^2$

(2) pour tous $v^1, w^1 \in V^1, v^2 \in V^2$ tels que $(v^1, w^1) \in E^1, (v^1, v^2) \in R$, il existe $w^2 \in V^2$ tel que $(v^2, w^2) \in E^2, (w^1, w^2) \in R$

(2') pour tous $v^2, w^2 \in V^2, v^1 \in V^1$ tels que $(v^2, w^2) \in E^2, (v^1, v^2) \in R$, il existe $w^1 \in V^1$ tel que $(v^1, w^1) \in E^1, (w^1, w^2) \in R$

(3) pour tous $v^1 \in V^1, v^2 \in V^2, i \in \{0, 1\}$ tels que $(v^1, v^2) \in R$

$v^1 \in V_i^1 \Leftrightarrow v^2 \in V_i^2$

(4) pour tous $v^1 \in V^1, v^2 \in V^2, i \in \{0, 1\}$ tels que $(v^1, v^2) \in R$

$\Omega^1(v^1) = \Omega^2(v^2)$.

1- Montrer que toute union de bisimulations de jeux de parité est une bisimulation.

2- En déduire qu'il existe un plus petit quotient de chaque jeu de parité \mathcal{J} par une bisimulation ; nous le nommerons *jeu minimal* associé au jeu \mathcal{J} .

3- Montrer que deux jeux de parité sont bisimilaires ssi leurs jeux minimaux sont isomorphes.

4- Donner un algorithme de calcul du jeu minimal d'un jeu de parité d'arène finie.