

## Jeux, Synthèse et Contrôle

### Opérations sur les jeux

#### Exercice 4.1 Jeux de “trinité”

On considère un jeu “colorié”  $\mathcal{J}$ , à 2 joueurs, à somme nulle :

$$\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, \Omega \rangle$$

où  $\Omega : V \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction de coloriage (on suppose que  $\text{Im}(\Omega)$  est finie). On note  $r$  la fonction de gain du joueur 0. Pour une partie  $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on pose

$$c(w) := \max\{c \in \mathbb{N} \mid (\Omega(w_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ passe i.s. par } c\}$$

et

$$r(w) := 1 \text{ si } c(w) \equiv 0 \pmod{3}, \quad r(w) := -1 \text{ si } c(w) \equiv 1 \pmod{3}, \quad r(w) := 0 \text{ si } c(w) \equiv 2 \pmod{3}.$$

1- Montrer que, pour tout sommet  $v \in V$ , le jeu  $(\mathcal{J}, v)$  vérifie la propriété *minimax* i.e. :

$$\max_{\sigma \in S_0} (\min_{\tau \in S_1} r(\sigma, \tau)) = \min_{\tau \in S_1} (\max_{\sigma \in S_0} r(\sigma, \tau)).$$

2- Montrer que, pour tout  $v \in V$ , la valeur du jeu  $(\mathcal{J}, v)$  est réalisée par une stratégie optimale  $\sigma_0$  (resp.  $\tau_1$ ) de J0 (resp. J1) qui est une *stratégie de position*.

3- Montrer que, si  $\mathcal{J}$  est fini, on peut calculer la valeur de  $(\mathcal{J}, v)$  et des stratégies de positions optimales de chacun des joueurs.

#### Exercice 4.2 Élimination de sommets dominés.

On considère un jeu  $\mathcal{J}$ , à 2 joueurs, de longueur  $\omega$  :

$$\mathcal{J} = \langle V_0, V_1, E, W \rangle$$

Soit  $v \in V_1$  tel que

$$\forall u \in V_0, (u, v) \in E \Rightarrow [\exists v' \in V_1, (u, v') \in E \text{ et } v'E \subseteq vE].$$

On note  $\mathcal{J} - \{v\}$  le jeu

$$\langle V_0, V_1 \setminus \{v\}, E', W \rangle$$

avec  $E' := E \cap (V_0 \times V_1 \setminus \{v\}) \cup E \cap (V_1 \setminus \{v\} \times V_0)$ .

1- Montrer que, pour tout  $v_0 \in V_0$ , J0 a une stratégie gagnante dans  $(\mathcal{J}, v_0)$  ssi J0 a une stratégie gagnante dans  $(\mathcal{J} - \{v\}, v_0)$ .

2- Montrer que, pour tout  $v_0 \in V_0$ , J1 a une stratégie gagnante dans  $(\mathcal{J}, v_0)$  ssi J1 a une stratégie gagnante dans  $(\mathcal{J} - \{v\}, v_0)$ .

#### Exercice 4.3 Dual du retournement du dual du retournement.

On considère un jeu  $\mathcal{J}$ , arborescent, de longueur finie. On compare les jeux  $D(R_s(D(R_s(\mathcal{J}))))$  et  $\mathcal{J}$ .

1- Peut-on utiliser la transformation de l'exercice 4.2 pour passer de l'un à l'autre ?

2- Soit  $v_0 \in V_0$ . Les deux jeux ont-ils le même gagnant en partant de  $v_0$  ?

3- Reprendre les questions 1,2, dans le cas d'un jeu de longueur  $\omega$ .

**Exercice 4.4** Jeu minimal.

Soient  $\mathcal{J}^1 = \langle V_0^1, V_1^1, E^1, \Omega^1 \rangle$  et  $\mathcal{J}^2 = \langle V_0^2, V_1^2, E^2, \Omega^2 \rangle$  des jeux de parité. Notons  $V^i := V_0^i \cup V_1^i$  (pour  $i \in \{1, 2\}$ ) l'ensemble des sommets du jeu  $\mathcal{J}^i$ .

On appelle *bisimulation* du jeu de parité  $\mathcal{J}^1$  par le jeu de parité  $\mathcal{J}^2$ , toute relation binaire  $R \subseteq V^0 \times V^1$  vérifiant :

(1)  $\text{Dom}(R) = V^1$

(1')  $\text{Im}(R) = V^2$

(2) pour tous  $v^1, w^1 \in V^1, v^2 \in V^2$  tels que  $(v^1, w^1) \in E^1, (v^1, v^2) \in R$ , il existe  $w^2 \in V^2$  tel que  $(v^2, w^2) \in E^2, (w^1, w^2) \in R$

(2') pour tous  $v^2, w^2 \in V^2, v^1 \in V^1$  tels que  $(v^2, w^2) \in E^2, (v^1, v^2) \in R$ , il existe  $w^1 \in V^1$  tel que  $(v^1, w^1) \in E^1, (w^1, w^2) \in R$

(3) pour tous  $v^1 \in V^1, v^2 \in V^2, i \in \{0, 1\}$  tels que  $(v^1, v^2) \in R$

$v^1 \in V_i^1 \Leftrightarrow v^2 \in V_i^2$

(4) pour tous  $v^1 \in V^1, v^2 \in V^2, i \in \{0, 1\}$  tels que  $(v^1, v^2) \in R$

$\Omega^1(v^1) = \Omega^2(v^2)$ .

1- Montrer que toute union de bisimulations de jeux de parité est une bisimulation.

2- En déduire qu'il existe un plus petit quotient de chaque jeu de parité  $\mathcal{J}$  par une bisimulation ; nous le nommerons *jeu minimal* associé au jeu  $\mathcal{J}$ .

3- Montrer que deux jeux de parité sont bisimilaires ssi leurs jeux minimaux sont isomorphes.

4- Donner un algorithme de calcul du jeu minimal d'un jeu de parité d'arène finie.