

## Jeux, Synthèse et Contrôle Équilibres de Nash

### Exercice 3.1 Stratégies Maxmin

On considère un jeu matriciel  $G$ , à 2 joueurs, à somme nulle. On note  $r$  la fonction de gain du joueur 1.

1- Montrer que

$$\max_{s_1 \in \Delta(S_1)} \left( \min_{s_2 \in \Delta(S_2)} r(s_1, s_2) \right) \leq \min_{s_2 \in \Delta(S_2)} \left( \max_{s_1 \in \Delta(S_1)} r(s_1, s_2) \right)$$

Lorsque les deux valeurs ci-dessus sont *égales* on dit que le jeu  $G$  a la valeur.

$$v := \max_{s_1 \in \Delta(S_1)} \left( \min_{s_2 \in \Delta(S_2)} r(s_1, s_2) \right)$$

Sinon, le jeu n'a pas de valeur.

2- Montrer que, si  $(s_1^*, s_2^*)$  est un équilibre de Nash de  $G$ , alors  $G$  a la valeur  $v = r(s_1^*, s_2^*)$ .

3- Supposons que  $(s_1^*, s_2^*)$  et  $(s_1^{**}, s_2^{**})$  sont des équilibres de Nash de  $G$ . Montrer que  $(s_1^*, s_2^{**})$  et  $(s_1^{**}, s_2^*)$  sont aussi des équilibres de Nash.

### Exercice 3.2 Élimination des stratégies dominées.

On considère un jeu matriciel  $G$ , à 2 joueurs. Une stratégie pure  $s_i \in S_i$  du joueur  $i$  est *strictement dominée* par une stratégie (pure)  $t_i \in S_i$  du même joueur si :

$$\forall s_{-i} \in S_{3-i}, r_i(s_i, s_{-i}) < r_i(t_i, s_{-i})$$

On note  $G \rightarrow G'$  la relation binaire, entre jeux matriciels :

$G'$  est obtenu à partir de  $G$  en supprimant une stratégie qui est strictement dominée.

1- Montrer que, si  $G \rightarrow G'$ , alors  $G$  et  $G'$  ont les mêmes équilibres de Nash (en stratégies pures).

On note  $\rightarrow^*$  la clôture réflexive et transitive de  $\rightarrow$ .

2- Montrer que, si  $G \rightarrow^* G'$  et si  $G'$  est un jeu  $1 \times 1$  (chaque joueur n'a qu'une stratégie), alors  $G$  a un équilibre de Nash.

3- Montrer que, si  $G \rightarrow^* G'$ ,  $G \rightarrow^* G''$  et si  $G', G''$  sont des jeux  $1 \times 1$  alors  $G' = G''$ .

4- Montrer que, sous les hypothèses de la question 2,  $G$  a un équilibre de Nash *unique*.

### Exercice 3.3 Indifférence à l'équilibre.

On considère un jeu matriciel  $G$ , à  $N$  joueurs. Soit  $\vec{\sigma}$  un équilibre de Nash, en stratégies mixtes, du jeu mixte  $G$ .

Notons

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N), \quad \sigma_i = \sum_{s \in S_i} p_{i,s} s.$$

1- Montrer que, pour tout joueur  $i \in [1, n]$ , et toute stratégie pure  $s \in S_i$ ,

$$p_{i,s} > 0 \Rightarrow R_i(s, \vec{\sigma}_{-i}) = \max_{t \in S_i} (R_i(t, \vec{\sigma}_{-i})).$$

2- Montrer que cette propriété *caractérise* les équilibres de Nash, en stratégies mixtes.

**Exercice 3.4** Calcul des équilibres de Nash.

On considère le jeu (matriciel, à somme nulle) de “tir au but” (ou encore Pile ou Face).

	<i>P</i>	<i>F</i>
<i>P</i>	1	-1
<i>F</i>	-1	1

- 1- Ce jeu a-t-il un équilibre de Nash en stratégies pures ?
- 2- Calculer l'équilibre de Nash (en stratégies mixtes) de ce jeu.  
Aide : on utilisera la propriété d'indifférence à l'équilibre vue à l'exercice 3.  
Reprendre le jeu de Pierre-feuille-ciseaux.
- 3- A-t-il un équilibre de Nash en stratégies pures ?
- 4- Calculer un équilibre de Nash en stratégies mixtes, pour ce jeu.