

Théorie des jeux

Préférences-Choix social

Axiomes de von Neumann et Morgenstern

Rappelons les axiomes de von Neumann et Morgenstern.

1- Axiomes de Préordre linéaire (AXpl) : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \preceq p \quad (\text{réflexivité})$$

$$p \preceq q \wedge q \preceq r \Rightarrow p \preceq r \quad (\text{transitivité})$$

$$p \preceq q \vee q \preceq p \quad (\text{linéarité})$$

2- Axiome d'Indépendance (AXind) : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \prec q \Rightarrow \lambda p + (1 - \lambda)r \prec \lambda q + (1 - \lambda)r$$

3- Axiome de Continuité (AXcon) : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \prec q \prec r \Rightarrow \exists \varepsilon \in]0, 1[, (1 - \varepsilon)p + \varepsilon r \prec q \prec \varepsilon p + (1 - \varepsilon)r$$

On rappelle que, dans les axiomes (AXind)(AXcon), $p \prec q$ signifie : $p \preceq q \wedge \neg(q \preceq p)$.

Exercice 1.1

Soit $Z := \{z_1, z_2, z_3\}$ un ensemble (les "alternatives") et soit $\Delta(Z) := \{(p_1, p_2, p_3) \in [0, 1] \mid p_1 + p_2 + p_3 = 1\}$ (l'ensemble des mesures de probabilités sur $(Z, \mathcal{P}(Z))$).

On considère la relation binaire suivante sur $\Delta(Z)$:

$$p \preceq q \Leftrightarrow (p_1 < q_1 \vee (p_1 = q_1 \wedge (p_2 < q_2 \vee (p_2 = q_2 \wedge p_3 \leq q_3))))).$$

Parmi les axiomes de VnM, lesquels sont vérifiés par cette relation binaire ?

Exercice 1.2

$Z, \Delta(Z)$ sont définis comme dans l'exercice 1. On considère la relation binaire suivante sur $\Delta(Z)$:

$$p \preceq q \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^3 p_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^3 q_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Parmi les axiomes de VnM, lesquels sont vérifiés par cette relation binaire ?

Exercice 1.3

$Z, \Delta(Z)$ sont définis comme dans l'exercice 1. On considère la relation binaire suivante sur $\Delta(Z)$:

$$p \preceq q \Leftrightarrow (p_1 = q_1 = 0) \vee (p_1 < q_1 \vee (p_1 = q_1 \wedge (p_2 < q_2 \vee (p_2 = q_2 \wedge p_3 \leq q_3))))).$$

1- Montrer que \preceq est un préordre linéaire.

2- Parmi les axiomes de VnM, lesquels sont vérifiés par ce préordre ?

On rappelle que la conclusion du Lemme 1.1.2 du cours est que : $\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \approx q \Rightarrow \lambda p + (1 - \lambda)r \approx \lambda q + (1 - \lambda)r$$

3- Montrer que cette conclusion n'est pas vérifiée par ce préordre \preceq .

4- En déduire que le Lemme 1.1.2 ne peut pas être démontré sans utiliser l'axiome de continuité.

Exercice 1.4

On considère la variante suivante de l'axiome d'Indépendance (notée AXindl) :

$\forall p, q, r \in \Delta(Z), \lambda \in]0, 1[$,

$$p \preceq q \Rightarrow \lambda p + (1 - \lambda)r \preceq \lambda q + (1 - \lambda)r$$

1- Montrer que les axiomes de VnM classiques (AXpl, AXind, AXcon) entraînent l'axiome modifié **AXindl**.

2- La conjonction des axiomes de VnM classiques (AXpl, AXind, AXcon) est-elle *équivalente* à la conjonction des axiomes (AXpl, **AXindl**, AXcon) ?

Systèmes de vote

Exercice 1.5 majoritaire vs alternatif

1- Comparer le mode de scrutin majoritaire avec le mode de scrutin alternatif. Pour un ensemble de préférences données (des électeurs), déterminent-ils le même choix ?

2- Quels axiomes vérifient-ils ?

3- Donner des *témoins* de manipulabilité ou de non-croissance.

Exercice 1.6 Condorcet vs Borda

1- Donner un scénario où le scrutin Majoritaire n'élit pas le vainqueur de Condorcet.

2- Le système alternatif élit-il toujours le vainqueur de Condorcet (lorsqu'il existe) ?

On considère maintenant le système de Borda, puis le système de Condorcet.

3- Ces systèmes élisent-ils le vainqueur de Condorcet (lorsqu'il existe) ?

Exercice 1.7 Condorcet vs Borda

1- Comparer les 2 modes de scrutin (Condorcet, Borda).

2- Quels axiomes vérifient-ils ?

3- Donner, pour chacun d'eux, un témoin de manipulabilité ou de non-croissance.

Exercice 1.8 Gibbard-Satterthwaite

1- Montrer que, si f est surjective et non-manipulable alors f est Pareto-efficace et monotone.

2- En déduire le théorème de Gibbard-Satterthwaite :

si $|A| \geq 3$ et si $f : \mathcal{S}_A^N \rightarrow A$ est surjective et non-manipulable, alors f est dictatoriale.

ANNEXE

Nous décrivons ici différents modes de scrutin. Chacun d'eux définit une application $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$.

Modes de scrutin.

Vote Majoritaire :

$f(\vec{P})$ est le candidat a , qui est classé premier le plus souvent par les n électeurs.

Vote Alternatif :

Soit a le candidat qui est classé premier le plus souvent par les N électeurs.

Si a a la majorité absolue (strictement) alors il est élu ($f(\vec{P}) := a$).

Sinon : soit b le candidat qui est classé premier le moins souvent par les n électeurs : b est éliminé. En enlevant b des classements des électeurs on obtient une nouvelle suite $\vec{P}' \in \mathcal{L}_{A \setminus \{b\}}^N$.

On pose $f(\vec{P}) := f(\vec{P}')$.

Cela revient à dire que chaque électeur ayant classé b premier *reporte* sa voix sur le deuxième de son classement.

Méthode de Borda :

On compte, pour chaque couple $(a, b) \in A \times A$ ($a \neq b$), combien de fois a aurait remporté un duel contre b ; le résultat est $D(a, b)$.

Le gagnant est le candidat $a \in A$ qui maximise le nombre

$$\sum_{b \neq a} D(a, b)$$

Méthode de Condorcet :

S' il existe un $a \in A$ qui remporterait tous ses duels contre tous les $b \neq a$, alors $f(\vec{P}) := a$ (on appelle a un " vainqueur de Condorcet").

Sinon : le gagnant est le candidat $a \in A$ qui maximise le nombre

$$\sum_{b \neq a} D(a, b)$$

(i.e. on applique la méthode de Borda dans le cas où il n'y a aucun vainqueur de Condorcet).

Axiomes sur les fonctions de choix.

On considère un entier N (le nombre d'électeurs), un ensemble fini A (l'ensemble des alternatives), l'ensemble \mathcal{L}_A des ordres linéaires sur A et une application $f : \mathcal{L}_A^N \rightarrow A$ (une fonction de choix).

Pareto-efficiente

f est dite Pareto-efficiente ssi, pour tout $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$,

$$[\forall i \in [1, n], \forall b \in A, a P_i b] \Rightarrow f(\vec{P}) = a$$

i.e. si tous les électeurs classent a premier, a est élu.

Non-manipulable

f est dite manipulable ssi, il existe $\vec{P} \in \mathcal{L}_A^N, i \in [1, n], P'_i \in \mathcal{L}_A$, tels que, pour $\vec{P}' = (P_1, \dots, P_{i-1}, P'_i, P_{i+1}, \dots, P_N)$

$$f(\vec{P}') P_i f(\vec{P})$$

i.e. l'électeur i , en *mentant* sur ses préférences, obtient un résultat *meilleur* du point de vue de ses préférences.

Monotone

f est dite monotone ssi, pour tous $\vec{P}, \vec{Q} \in \mathcal{L}_A^N$

$$[f(\vec{P}) = a \text{ et } , \forall i \in [1, n], \forall b \in A, a P_i b \Rightarrow a Q_i b] \Rightarrow f(\vec{Q}) = a$$

i.e. si le candidat a est élu par la suite de préférences \vec{P} , et si dans \vec{Q} a a un meilleur rang dans chaque préférence, alors le candidat a est aussi élu par \vec{Q} .

Neutre

On voit ici \mathcal{L}_A comme l'ensemble des bijections $[1, |A|] \rightarrow A$. Pour tout ensemble E , on note \mathcal{S}_E l'ensemble des bijections de E dans E .

L'application f est dite Neutre *vis à vis des électeurs* ssi, pour tous $\sigma \in \mathcal{S}_{[1, N]}, \vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ on a

$$f(\vec{P} \circ \sigma) = f(\vec{P})$$

L'application f est dite Neutre *vis à vis des candidats* ssi, pour tous $\tau \in \mathcal{S}_A, \vec{P} \in \mathcal{L}_A^N$ on a

$$f(\tau \circ \vec{P}) = \tau(f(\vec{P}))$$